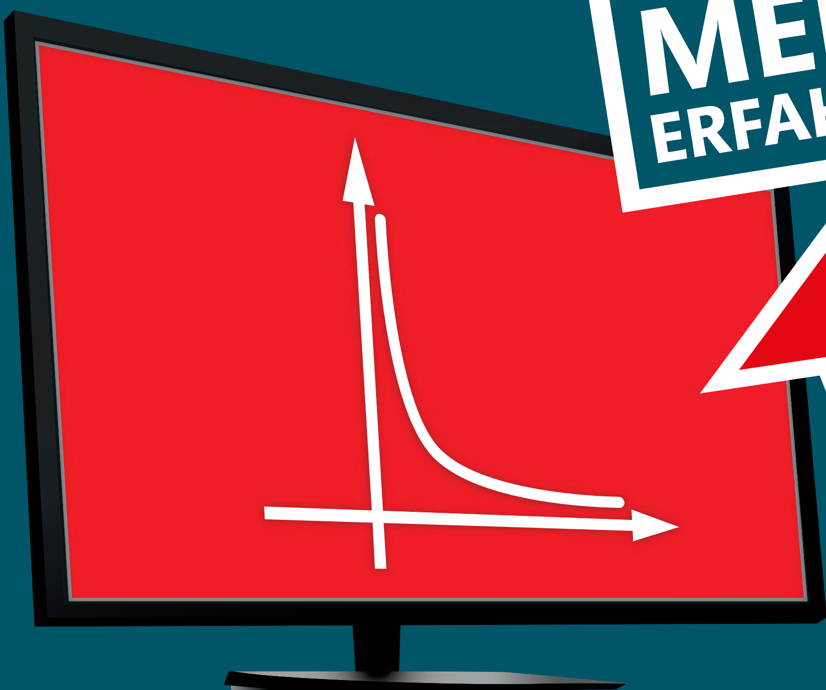
STARK digital

LESEPROBE

MATHEMATIK

Allgemeinbildendes Gymnasium



MEHR ERFAHREN

0601 D1

VERFÜGBARE JAHRGÄNGE

BUNDESLAND	BESCHREIBUNG	JAHRGANG
Baden-Württemberg	Gymnasium	**ab 2012**
Bayern	Gymnasium	**ab 2011**
Berlin	Gymnasium	**ab 2014**
Brandenburg	Gymnasium	**ab 2011**
Hamburg	Gymnasium GN/EN	**ab 2012**
Hessen	Gymnasium / Gesamtschule GK/LK	**ab 2011**
Mecklenburg-Vorpommern	Gymnasium	**2011 – 2013**
Niedersachsen	Gymnasium / Gesamtschule GA/EA	**ab 2010**
Nordrhein-Westfalen	Gymnasium / Gesamtschule GK/LK	**ab 2011**
Rheinland-Pfalz	Gymnasium	**ab 2017**
Sachsen	Gymnasium GK/LK	**ab 2011**
Sachsen-Anhalt	Gymnasium GN/EN	**2007 – 2013**
Schleswig-Holstein	Gymnasium / Gemeinschaftsschule	**ab 2010**
Thüringen	Gymnasium	**ab 2012**

Abitur Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 2018
Prüfungsteil A – Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1. Geben Sie für die Funktionen f_1 und f_2 jeweils die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle an.

   $f_1: x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-4}$ $\qquad$ $f_2: x \mapsto \ln(x+2)$ 4

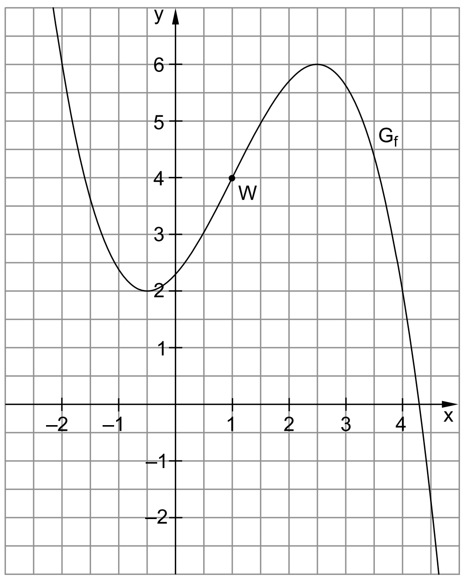
2. Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, deren Graph im Punkt $(2|1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt hat. 3

3. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
   Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
   (1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
   (2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A(5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.
   (3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden. 5

4. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit dem Wendepunkt $W(1|4)$.

   Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x = 1$.

   Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f in die Abbildung; berücksichtigen Sie dabei insbesondere die Lage der Nullstellen von f' sowie den für f'(1) ermittelten Näherungswert.



3

5. Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

   a) Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

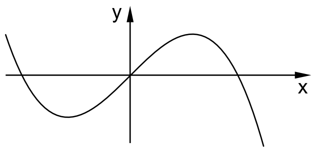


Abb. 1

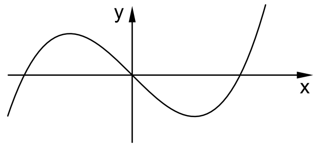


Abb. 2 2

   b) Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat. 3

20

Aufgabengruppe 2

BE

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{3x-5}$ mit maximalem Definitionsbereich D. Geben Sie D an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(3 \mid f(3))$. 6

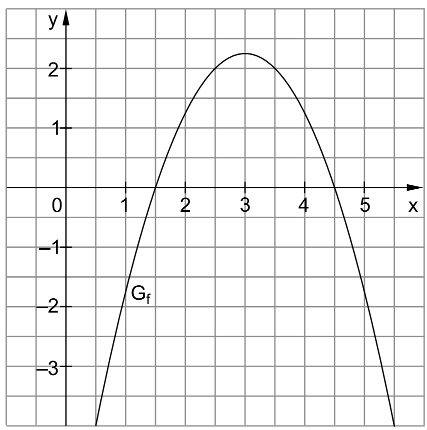
2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$. Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
   (1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
   (2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A(5 \mid f(5))$ die x-Achse als Tangente.
   (3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(-1 \mid f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden. 5

3. Die Abbildung zeigt eine nach unten geöffnete Parabel, die zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gehört. Der Scheitel der Parabel hat die x-Koordinate 3.

   Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion

   $$F: x \mapsto \int_3^x f(t)\,dt.$$

   Wie viele Nullstellen hat F? Machen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung plausibel. 4



Tipps und Hinweise

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 1

- Um welche Art Funktion handelt es sich bei f_1?
- Was darf bei einem Bruch nie passieren?
- Division durch null ist nicht definiert.
- Für welche x-Werte hat der Nenner den Wert null?
- Ein Bruch hat den Wert null, wenn der Zähler den Wert null hat (und der Nenner nicht).
- Um welche Art Funktion handelt es sich bei f_2?
- Das Argument einer ln-Funktion muss positiv sein.
- $\ln x$ besitzt seine einzige Nullstelle für $x = 1$.

Aufgabe 2

- Im Punkt $(2|1)$ befindet sich eine waagrechte Tangente, aber das Monotonieverhalten ändert sich nicht.
- Ein Punkt, der kein Extrempunkt ist, aber eine waagrechte Tangente besitzt, ist ein Terrassenpunkt.
- Ist Ihnen eine Funktion bekannt, die im Ursprung einen Terrassenpunkt besitzt?
- Die Funktion $f(x) = x^3$ besitzt im Ursprung eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt.
- Wie muss der Graph von $f(x) = x^3$ verschoben werden, damit sich der Terrassenpunkt nicht in $(0|0)$, sondern in $(2|1)$ befindet?
- Mögliche Verschiebungen sind:
$f(x) + a$ Verschiebung um a in y-Richtung
$f(x + a)$ Verschiebung um $-a$ in x-Richtung

Aufgabe 3 (1)

- Wie bestimmt man die Steigung einer Funktion für ein gegebenes x?
- Die Steigung der Tangente wird durch die 1. Ableitung angegeben.
- Die Forderung ist erfüllt, wenn $f'(0) = -15$ gilt.

Lösungen

Aufgabengruppe 1

1. $f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$

$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = \pm 2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$2x + 3 = 0$
$x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Nullstelle: $x = -1{,}5$

$f_2(x) = \ln(x+2)$

$x + 2 > 0$
$x > -2$

$\mathbb{D} =]-2; +\infty[$

$x + 2 = 1$
$x = -1$

Nullstelle: $x = -1$

2. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist in $\mathbb{R}$ definiert und besitzt in $(0|0)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt (also einen Terrassenpunkt).
Verschiebt man den Graphen G_f um 2 in positive x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung, so verschiebt sich $(0|0)$ nach $(2|1)$.

Verschiebung um 2 in positive x-Richtung: Aus $f(x) = x^3$ entsteht $g(x) = (x-2)^3$.
Verschiebung um 1 in positive y-Richtung: Aus $g(x) = (x-2)^3$ entsteht $h(x) = (x-2)^3 + 1$.

Die Funktion $h(x) = (x-2)^3 + 1$ besitzt in $(2|1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt.

3. $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$
$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

(1) $f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 15 = -15$ **erfüllt**

(2) $f(5) = -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 - 25 = 0$
$f'(5) = -3 \cdot 5^2 + 18 \cdot 5 - 15 = 0$
Da A auf der x-Achse liegt und die Tangente in A waagrecht verläuft, besitzt der Graph von f in A die x-Achse als Tangente. **erfüllt**

(3) $f(-1) = -(-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-1) - 25 = 0$
$f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) - 15 = -36$
Tangente: $y = mx + t$ mit $m = f'(-1) = -36$ durch $B(-1|f(-1)) = B(-1|0)$
$0 = -36 \cdot (-1) + t$
$t = -36$
$y = -36x - 36$ **erfüllt**