MEHR ERFAHREN

NEUES ABITUR

ABITUR-TRAINING

Mathematik

Analysis

STARK

Inhalt

Autoren:
Dr. Raimund Ordowski, Arnold Zitterbart

Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens empfehlen wir, dass Sie sich beim Ansehen der Videos im WLAN befinden. Haben Sie keine Möglichkeit, den QR-Code zu scannen, finden Sie die Lernvideos auch unter:

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband für die **Analysis** halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik umfassend unterstützt.

Das Buch ist sowohl für das **grundlegende** als auch für das **erhöhte Anforderungsniveau** (also **GK** und **LK**) geeignet. Lernabschnitte, die nur für das erhöhte Anforderungsniveau relevant sind, wurden mit einem ✱ markiert. Die Einteilung erfolgte hierbei nach den **Vorgaben der Bildungsstandards** und kann in den einzelnen Bundesländern leicht davon abweichen.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie Probleme haben. Folgende Elemente erleichtern dabei das Lernen und Verstehen:

- **Definitionen** und **Regeln** werden klar und präzise formuliert und in blauen Kästen hervorgehoben, damit Sie die zentralen Inhalte eines Abschnitts schnell erfassen können.
- **Beispiele** verdeutlichen die Themen und helfen Ihnen, die Theorie praktisch nachzuvollziehen.
- **Musteraufgaben** zeigen Ihnen Schritt für Schritt, wie Sie die Rechen- und Denkwege nachvollziehen und anwenden können.
- **Lernvideos** ergänzen die Musteraufgaben: Durch Scannen des QR-Codes gelangen Sie einfach und direkt zu einem Video, das Ihnen das Thema anschaulich erläutert.
- **Übungsaufgaben** ermöglichen Ihnen, den gelernten Stoff anzuwenden und Ihre Fähigkeiten zu überprüfen.

  Darunter gibt es Übungsaufgaben, die **ohne Hilfsmittel** gelöst werden können.
- **Lösungen** zu allen Übungsaufgaben finden Sie am Ende des Buches. Sie sind ausführlich erklärt, damit Sie jeden Schritt und den Lösungsansatz genau nachvollziehen können.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für die gesamte Abiturprüfung und alles erdenklich Gute für Ihren weiteren Lebensweg.

Ihr Autorenteam und Ihr STARK Verlag

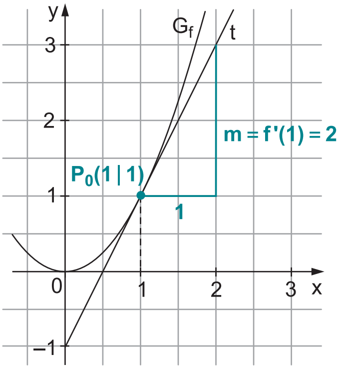
1 Bedeutung der Ableitung

Unter bestimmten Bedingungen kann man eine Funktion f **ableiten** oder **differenzieren** und erhält die zugehörige **Ableitungsfunktion** oder kurz **Ableitung f'**.
Die folgende Darstellung soll verschiedene Bedeutungen der Ableitung erläutern, ohne auf ausführliche und exakte Herleitungen des Unterrichts einzugehen.
Für die Funktion f mit $f(x) = x^2$ erhält man die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 2x$ (vgl. Abschnitt 2 ab Seite 45).

Die **Ableitung $f'(x_0)$ an einer Stelle x_0** kann man auf zwei Arten interpretieren:

(1) **Steigung des Graphen im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$**

Dabei versteht man unter der Steigung des Graphen G_f in P_0 die Steigung der Geraden, die sich in diesem Punkt „optimal" an den Graphen „anschmiegt", d. h., ihn in P_0 „berührt". Man nennt sie **Tangente t** an den Graphen im Punkt P_0.



Für die vorgegebene Funktion f gilt:
Der Funktionswert an der Stelle $x_0 = 1$ ist $f(1) = 1$.
Die Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ hat den Wert $f'(1) = 2$.

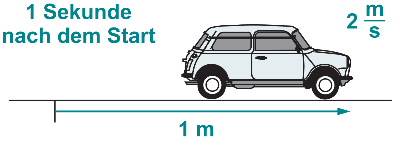
Daher hat die Tangente t im Punkt $P_0(1 \mid 1)$ die Steigung $m = f'(1) = 2$.

(2) **Momentane oder lokale Änderungsrate an der Stelle x_0**

Die vorgegebene Funktion f kann beispielsweise den zurückgelegten Weg eines Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben, wobei f(x) in Meter und x in Sekunden gemessen wird.

Dann bedeutet:

$f(1) = 1$: Das Fahrzeug hat in einer Sekunde ab dem Start einen **Weg** der Länge 1 Meter zurückgelegt.



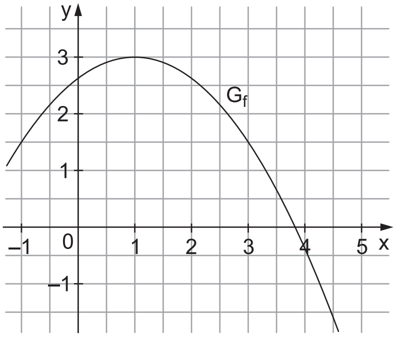
$f'(1) = 2$: Das Fahrzeug hat nach einer Sekunde eine **Geschwindigkeit** von 2 Meter pro Sekunde, d. h., die **momentane Änderungsrate** des Weges beträgt 2 Meter pro Sekunde.

Die nachfolgende Übersicht zeigt Beispiele für momentane Änderungsraten.

Die **Funktion f** stellt dar:	Die **Ableitung f'** bedeutet:
zurückgelegte **Wegstrecke** in Meter (m) in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden (s)	**Geschwindigkeit** in $\frac{m}{s}$
Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden (s)	**Beschleunigung** in $\frac{m}{s^2}$
Wassermenge in m^3 in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit in min	**Zuflussrate** oder **Abflussrate** in $\frac{m^3}{min}$
Kraftstoffinhalt eines Autotanks in Liter in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg in km	**Kraftstoffverbrauch** in $\frac{Liter}{km}$
Bestand einer Population in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren (a)	**Zuwachsrate** in $\frac{1}{a}$

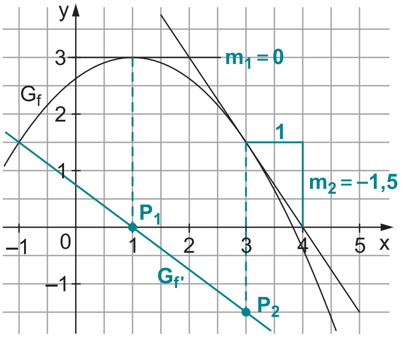
Musteraufgabe

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer Funktion f.
Zeichnen Sie möglichst genau die Tangenten an G_f bei den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ in die Abbildung ein und bestimmen Sie grafisch f'(1) und f'(3).
Der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' ist eine Gerade.
Zeichnen Sie $G_{f'}$ in die Abbildung ein.



Lösung Die beiden Tangenten zeichnet man mit dem Geodreieck nach Augenmaß in die Abbildung ein.
Die Tangente an der Stelle $x_1 = 1$ verläuft waagrecht. Ihre Steigung ist daher $m_1 = 0$, es gilt also $f'(1) = 0$.

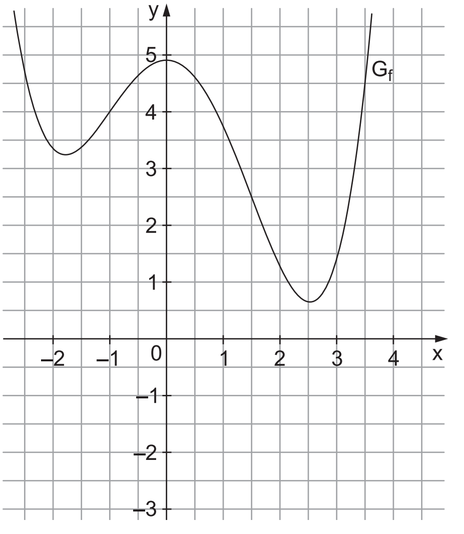
An einem geeigneten Steigungsdreieck liest man für die Tangente an der Stelle $x_2 = 3$ die Steigung $m_2 = -1{,}5$ ab. Somit gilt $f'(3) = -1{,}5$.
Der Graph $G_{f'}$ der Ableitung f' ist die Gerade, die durch die Punkte $P_1(1\,|\,0)$ und $P_2(3\,|\,-1{,}5)$ verläuft.



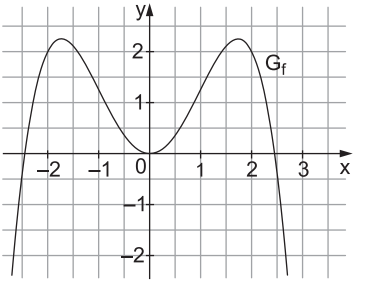
Beispiele und Aufgaben zu Änderungsraten finden Sie in Abschnitt 7 (ab Seite 66) sowie in Abschnitt 6 im Kapitel „Integralrechnung“ ab Seite 93.

Übungsaufgaben

41 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Bestimmen Sie grafisch wie in der Musteraufgabe näherungsweise f'(–1) und f'(1,5).
Skizzieren Sie den Graphen von f' in die Abbildung.



42 Der abgebildete Graph einer Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse. Im Bereich $0 \leq x \leq 2$ ist $f'(1) = 2$ der größte Wert der Ableitungsfunktion f'.
Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in die Abbildung.



Also gilt für $\mathbf{x_1 = 0}$: $(u \circ v)(0) = u(v(0)) = u(-1) = 0$
und für $\mathbf{x_2 = 2}$: $(u \circ v)(2) = u(v(2)) = u(3) = 0$

40 Für die Verkettung $f \circ g$ mit $f(x) = \frac{1}{x-1}$ und $g(x) = x^2 - 3$ erhält man:

$$f(g(x)) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{(x^2-3)-1} = \frac{1}{x^2-4}$$

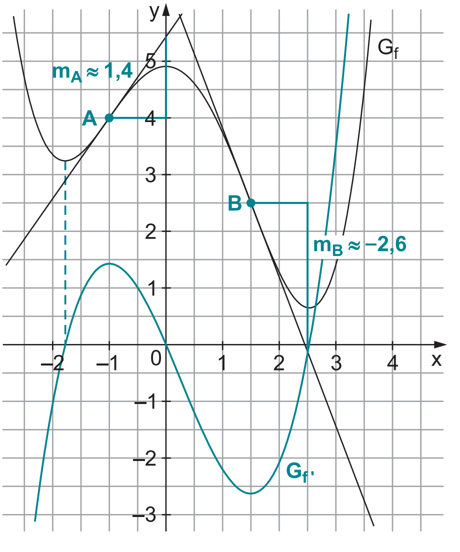
Die Definitionslücken dieser gebrochenrationalen Funktion erhält man, indem man das Nennerpolynom gleich 0 setzt:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x_{1;2} = \pm 2$$

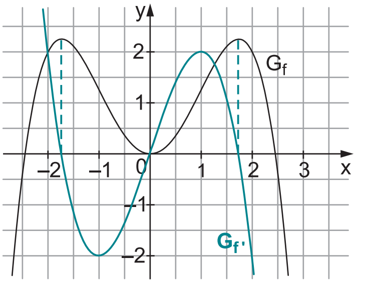
Für $\mathbf{x_1 = -2}$ und $\mathbf{x_2 = 2}$ ist die Verkettung nicht definiert.

41 An den Graphen G_f zeichnet man mit dem Geodreieck möglichst genau die Tangenten an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1{,}5$. Mithilfe von Steigungsdreiecken bestimmt man ihre Steigungen, die gleich den Ableitungen an diesen Stellen sind. Man erhält: $f'(-1) \approx 1{,}4$ und $f'(1{,}5) \approx -2{,}6$

Diese beiden Werte geben auch ungefähr die größte bzw. kleinste Steigung des Graphen zwischen den Tiefpunkten an. Berücksichtigt man noch, dass am Hochpunkt bzw. an den Tiefpunkten von G_f die Tangenten waagrecht verlaufen, d. h., dass f' an den entsprechenden x-Werten den Funktionswert 0 hat, kann man mit diesen Informationen den Graphen $G_{f'}$ der Ableitung skizzieren.



42 Aus $f'(1)=2$ folgt wegen der Achsensymmetrie von G_f zur y-Achse $f'(-1)=-2$ als kleinste Steigung im Bereich $-2 \leq x \leq 0$.
Berücksichtigt man noch, dass am Tiefpunkt bzw. an den Hochpunkten von G_f die Tangenten waagrecht verlaufen, d. h., dass f' an den entsprechenden x-Werten den Funktionswert 0 hat, kann man mit diesen Informationen den Graphen $G_{f'}$ der Ableitung skizzieren.



43 Für die folgenden Ableitungen brauchen Sie neben der Summen- und der Faktorregel vor allem die Produkt- und die Kettenregel.

a) $f(x)=x^4 \cdot e^{3x+1}$
$f'(x)=4x^3 \cdot e^{3x+1}+x^4 \cdot e^{3x+1} \cdot 3=4x^3 \cdot e^{3x+1}+3x^4 \cdot e^{3x+1}$
$=(4x^3+3x^4) \cdot e^{3x+1}$

b) $f(x)=(2x^2+x) \cdot e^{-4x}$
$f'(x)=(4x+1) \cdot e^{-4x}+(2x^2+x) \cdot e^{-4x} \cdot (-4)$
$=(4x+1) \cdot e^{-4x}+(-8x^2-4x) \cdot e^{-4x}$
$=(1-8x^2) \cdot e^{-4x}$

c) $f(x)=\sqrt{x} \cdot e^{-3x}$
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-3x}+\sqrt{x} \cdot e^{-3x} \cdot (-3)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-3\sqrt{x}\right) \cdot e^{-3x}$

d) $f(x)=(2+e^{2x})^3$
$f'(x)=3 \cdot (2+e^{2x})^2 \cdot e^{2x} \cdot 2=6 \cdot (2+e^{2x})^2 \cdot e^{2x}$

e) $f(x)=\frac{1}{x^3} \cdot e^{-5x+2}=x^{-3} \cdot e^{-5x+2}$
$f'(x)=-3 \cdot x^{-4} \cdot e^{-5x+2}+x^{-3} \cdot e^{-5x+2} \cdot (-5)=-\frac{3}{x^4} \cdot e^{-5x+2}-\frac{5}{x^3} \cdot e^{-5x+2}$
$=-\left(\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^3}\right) \cdot e^{-5x+2}$

f) $f(x)=x^2 \cdot \sqrt{3x+2}$
$f'(x)=2x \cdot \sqrt{3x+2}+x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \cdot 3=2x \cdot \sqrt{3x+2}+\frac{3x^2}{2\sqrt{3x+2}}$