MEHR ERFAHREN

NEUES ABITUR

ABITUR-TRAINING

Mathematik

Stochastik

STARK

Inhalt

Autoren:
Ingeborg Goller, Jürgen Mehnert, Raimund Ordowski, Franz Wieand

Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens empfehlen wir Ihnen, dass Sie sich beim Ansehen der Videos im WLAN befinden. Haben Sie keine Möglichkeit, den QR-Code zu scannen, finden Sie die Lernvideos auch unter

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband für die **Stochastik** halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik umfassend unterstützt.

Das Buch ist sowohl für das **grundlegende** als auch für das **erhöhte Anforderungsniveau** (also **GK** und **LK**) geeignet. Lernabschnitte, die nur für das erhöhte Anforderungsniveau relevant sind, wurden mit einem ✱ markiert. Die Einteilung erfolgte hierbei nach den **Vorgaben der Bildungsstandards** und kann in den einzelnen Bundesländern leicht davon abweichen.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie Probleme haben. Folgende Elemente erleichtern dabei das Lernen und Verstehen:

- **Definitionen** und **Regeln** werden klar und präzise formuliert und in blauen Kästen hervorgehoben, damit Sie die zentralen Inhalte eines Abschnitts schnell erfassen können.
- **Beispiele** verdeutlichen die Themen und helfen Ihnen, die Theorie praktisch nachzuvollziehen.
- **Musteraufgaben** zeigen Ihnen Schritt für Schritt, wie Sie die Rechen- und Denkwege nachvollziehen und anwenden können.
- **Lernvideos** ergänzen die Musteraufgaben: Durch Scannen des QR-Codes gelangen Sie einfach und direkt zu einem Video, das Ihnen das Thema anschaulich erläutert.
- **Übungsaufgaben** ermöglichen Ihnen, den gelernten Stoff anzuwenden und Ihre Fähigkeiten zu überprüfen.

  Darunter gibt es Übungsaufgaben, die **ohne Hilfsmittel** gelöst werden können.
- **Lösungen** zu allen Übungsaufgaben finden Sie am Ende des Buches. Sie sind ausführlich erklärt, damit Sie jeden Schritt und den Lösungsansatz genau nachvollziehen können.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für die gesamte Abiturprüfung und alles erdenklich Gute für Ihren weiteren Lebensweg.

Ihr Autorenteam und Ihr STARK Verlag

1 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Vierfeldertafel

In Aufgabe 16 auf S. 23 ging es um Jugendliche, die zum Teil in einem Sportverein (kurz: S) sind und/oder ein Musikinstrument (kurz: M) spielen. Es ergab sich folgende Vierfeldertafel:

	S	$\overline{S}$	
M	40	200	240
$\overline{M}$	110	50	160
	150	250	400

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt **ein Jugendlicher, der im Sportverein ist,** auch ein Instrument?

Betrachtet man diese Frage genauer, stellt man schnell fest, dass man nur an den 150 Jugendlichen im Sportverein interessiert ist und nicht an der Gesamtheit aller 400 Jugendlichen. Aus der Vierfeldertafel kann man ablesen, dass von diesen 150 Jugendlichen 40 auch ein Instrument spielen.
Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{40}{150} \approx 26,67\ \%$.

Antwort: **Wenn** ein Jugendlicher im Sportverein ist, dann spielt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 26,67 % ein Musikinstrument.

Wie kann die Wahrscheinlichkeit $\frac{40}{150}$ als Formel geschrieben werden? Teilt man Zähler und Nenner des Bruches jeweils durch die Anzahl aller 400 Jugendlicher, so erhält man $\frac{\frac{40}{400}}{\frac{150}{400}}$. Im Zähler steht dann die Wahrscheinlichkeit $P(M \cap S)$ und im Nenner die Wahrscheinlichkeit $P(S)$. Der Quotient $\frac{P(M \cap S)}{P(S)}$ gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Jugendlicher ein Musikinstrument spielt, wenn er in einem Sportverein ist. Statt **„wenn“** kann man auch **„unter der Bedingung, dass“** sagen. Für diese Wahrscheinlichkeit schreibt man $\mathbf{P_S(M)}$.

Sind zwei Ereignisse A und B (mit $P(B) \neq 0$) gegeben, dann heißt

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist.

Bemerkung: Bedingte Wahrscheinlichkeiten können in der Vierfeldertafel nicht direkt als Zahl eingetragen werden. Es ist immer eine Rechnung erforderlich.

Musteraufgabe

In einem Abi-Jahrgang möchten 60 % der Abiturientinnen und Abiturienten sudieren. 54 % aller Abiturientinnen und Abiturienten haben in ihrem Abitur eine gute oder sehr gute Note erhalten. 25 % der Abiturientinnen und Abiturienten haben keine gute oder sehr gute Note im Abitur und möchten studieren.

a) Erstellen Sie die zugehörige Vierfeldertafel.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person aus diesem Abi-Jahrgang, die nicht studieren möchte, eine gute oder sehr gute Note erhalten hat.

Lösung

a) Abkürzend wird S für „Person möchte studieren“ und G für „gute oder sehr gute Note“ verwendet. Gegeben sind dann:

$P(S) = 0{,}6$ — 60 % möchten studieren.

$P(G) = 0{,}54$ — 54 % haben eine gute oder sehr gute Note erhalten.

$P(S \cap \overline{G}) = 0{,}25$ — 25 % haben keine gute oder sehr gute Note erhalten und möchten studieren.

Nun kann die Vierfeldertafel vollständig ausgefüllt werden:

	S	$\overline{S}$	
G	0,35	0,19	**0,54**
$\overline{G}$	**0,25**	0,21	0,46
	0,6	0,4	**1**

Die farbig gedruckten Zahlen sind (indirekt) gegeben. Die restlichen Werte ergeben sich durch Subtraktionen.

b) Es ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit gesucht. Die Bedingung ist hier „Person möchte nicht studieren“, gesucht ist $P_{\overline{S}}(G)$.

$$P_{\overline{S}}(G) = \frac{P(\overline{S} \cap G)}{P(\overline{S})} = \frac{0{,}19}{0{,}4} = 0{,}475 = 47{,}5\ \%$$

Übungsaufgaben

58 Gegeben sind die Ereignisse A: „Ein zufällig ausgewähltes Teststück hat den Fehler A.“ und B: „Ein zufällig ausgewähltes Teststück hat den Fehler B.“ Kreuzen Sie an, bei welchen Fragestellungen die Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ gesucht ist.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Teststück den Fehler A, wenn es den Fehler B aufweist?	☐
Ein Teststück hat den Fehler A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch den Fehler B?	☐
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist das Teststück, das den Fehler A hat, den Fehler B auf?	☐
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Teststück den Fehler B, wenn es den Fehler A hat?	☐

59 Geben Sie für jede Aussage die richtige Formelgleichung an.

a	18 % aller Mathelehrkräfte haben einen Hund.
b	Jedes fünfte Kind mag Kaugummi, aber kein Schnitzel.
c	Jedes vierte Mädchen möchte kein Pferd haben.
d	Alle Lügner haben kurze Beine.
e	Mindestens 76 von 80 Schülerinnen und Schülern, die ihre Hausaufgaben nicht regelmäßig machen, bekommen zu Hause Ärger.

60 Der TÜV-Bericht ergab: 12 % der vorgeführten Pkws haben schwerwiegende Mängel und erhalten deshalb nicht die Plakette. 60 % dieser Pkws sind über 7 Jahre alt. Von den vorgeführten Pkws erhalten 20 % die Plakette und sind älter als 7 Jahre.
Frau Schmitt fährt mit ihrem 9 Jahre alten Auto zum TÜV.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ihr Auto die Plakette bekommt. Verwenden Sie eine Vierfeldertafel.

61 Jeder vierte aller bei Dr. Medicus vorsprechenden Patientinnen und Patienten leidet an hohem Fieber. 8,2 % der Patientinnen und Patienten fiebern, ohne infiziert zu sein. 8 von 10 Patientinnen und Patienten mit einer Virusinfektion leiden auch an hohem Fieber.

a) Stellen Sie die zugehörige Vierfeldertafel auf und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine behandelte Person weder fiebert noch einen Virusinfekt hat.

b) Es haben sich 38 Patientinnen und Patienten für heute bei Dr. Medicus angemeldet.
Mit wie vielen virusinfizierten Personen kann Dr. Medicus heute rechnen? Nehmen Sie zu dem Ergebnis Stellung.

59 a) $P_{\text{Mathelehrkraft}}(\text{Hund}) = 0{,}18$

b) $P(\text{Kaugummi} \cap \overline{\text{Schnitzel}}) = 0{,}20$

c) $P_{\text{Mädchen}}(\overline{\text{Pferd}}) = 0{,}25$

d) $P_{\text{Lügner}}(\text{kurze Beine}) = 1$

e) $P_{\overline{\text{Hausaufgaben}}}(\text{Ärger}) \geq \frac{76}{80} = 0{,}95$

60 M stehe für „mangelhaft“ (deshalb ohne Plakette).
A stehe für „älter als 7 Jahre“.

Gegeben:
$P(M) = 0{,}12$
$P_M(A) = 0{,}60$
$P(A \cap \overline{M}) = 0{,}20$

Aus den ersten beiden Werten folgt:

$$P_M(A) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap M) = P_M(A) \cdot P(M) = 0{,}60 \cdot 0{,}12 = 0{,}072$$

Damit lässt sich die Vierfeldertafel vollständig ausfüllen.

	A	$\overline{\text{A}}$	
M	**0,072**	0,048	**0,120**
$\overline{\text{M}}$	**0,200**	0,680	0,880
	0,272	0,728	**1**

Die farbig gedruckten Zahlen sind (indirekt) gegeben.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Schmitts mehr als 7 Jahre altes Auto die TÜV-Plakette erhält. Die Bedingung ist also „mehr als 7 Jahre“.

$$P_A(\overline{M}) = \frac{P(A \cap \overline{M})}{P(A)} = \frac{0{,}200}{0{,}272} \approx 73{,}53\ \%$$

Das Auto von Frau Schmitt erhält mit einer Wahrscheinlichkeit von 73,53 % die Plakette.

61 a) I stehe für „Behandelte Person leidet an einer Virusinfektion“.
F stehe für „Behandelte Person hat hohes Fieber“.

Gegeben:
$P(F) = 0{,}25$
$P(F \cap \overline{I}) = 0{,}082$
$P_I(F) = 0{,}80$ „8 von 10“ bedeutet 80 %

Trägt man die Wahrscheinlichkeiten in die Vierfeldertafel ein, so erkennt man, dass sich P(F) aus $P(F \cap \overline{I})$ sowie $P(F \cap I)$ zusammensetzt.

	I	$\overline{I}$	
F		0,082	0,25
$\overline{F}$			
			1

$P(F) = P(F \cap I) + P(F \cap \overline{I})$

Es folgt:

$P(F \cap I) = P(F) - P(F \cap \overline{I}) = 0{,}25 - 0{,}082 = 0{,}168$

Nun kann aus der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit P(I) gefolgert werden:

$P_I(F) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} \quad \Rightarrow \quad P(I) = \frac{P(F \cap I)}{P_I(F)} = \frac{0{,}168}{0{,}80} = 0{,}21$

Damit kann die Vierfeldertafel vollständig ausgefüllt werden:

	I	$\overline{I}$	
F	0,168	0,082	0,250
$\overline{F}$	0,042	0,708	0,750
	0,210	0,790	1

Dass die behandelte Person weder Fieber noch einen Virusinfekt hat, heißt übersetzt $P(\overline{F} \cap \overline{I})$. Diese Wahrscheinlichkeit ist aus der Vierfeldertafel direkt ablesbar als:

$P(\overline{F} \cap \overline{I}) = 0{,}708 = 70{,}80\ \%$

b) Die Wahrscheinlichkeit, infiziert zu sein, beträgt 21 %.
$0{,}21 \cdot 38 = 7{,}98$
Dr. Medicus kann mit etwa 8 virusinfizierten Personen rechnen.

Das Ergebnis ist als Durchschnittswert einer langen Zeitspanne zu sehen, da die Zahl der Viruspatientinnen und Viruspatienten immer stark von der Jahreszeit abhängt.

62 a) $P(\overline{K} \cap \overline{H}) = 0{,}17$ in Worten:
17 % aller Radfahrerinnen und Radfahrer erlitten beim Unfall weder eine Kopfverletzung noch trugen sie einen Helm.

$P(H) = 0{,}38$ in Worten:
38 % der Radfahrerinnen und Radfahrer trugen beim Unfall einen Helm.

$P_K(\overline{H}) = 0{,}69$ in Worten:

69 % derjenigen Radfahrerinnen und Radfahrer, die beim Unfall eine Kopfverletzung erlitten, trugen keinen Helm.