2025

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Hamburg

Mathematik

+ *Online-Glossar*

STARK

Inhalt

Vorwort
Stichwortverzeichnis

Allgemeine Hinweise zum Zentralabitur

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung I
Die prüfungsrelevanten Inhalte der Studienstufe I
Aufbau der Prüfungsaufgaben und Dauer der Prüfung IX
Operatoren in zentralen Prüfungsaufgaben Mathematik X
Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung ... XIII
Lösungsplan XIV
Weiterführende Informationen XV

Original-Abituraufgaben

Abiturprüfung 2022
Grundlegendes Anforderungsniveau – Hilfsmittelfreier Prüfungsteil 2022-1
Grundlegendes Anforderungsniveau – Analysis 1 2022-9
Grundlegendes Anforderungsniveau – Lineare Algebra 2022-16
Grundlegendes Anforderungsniveau – Analytische Geometrie 2022-22
Grundlegendes Anforderungsniveau – Stochastik 2022-29
Grundlegendes Anforderungsniveau – Analysis 2 2022-37
Erhöhtes Anforderungsniveau – Hilfsmittelfreier Prüfungsteil 2022-43
Erhöhtes Anforderungsniveau – Analysis 1 2022-53
Erhöhtes Anforderungsniveau – Lineare Algebra 2022-63
Erhöhtes Anforderungsniveau – Analytische Geometrie 2022-69
Erhöhtes Anforderungsniveau – Stochastik 2022-79
Erhöhtes Anforderungsniveau – Analysis 2 2022-89

Abiturprüfung 2023 (ausgewählte Aufgaben)
Grundlegendes Anforderungsniveau – Hilfsmittelfreier Prüfungsteil 2023-1
Grundlegendes Anforderungsniveau – Analysis 1 2023-11
Grundlegendes Anforderungsniveau – Lineare Algebra 2023-21
Grundlegendes Anforderungsniveau – Stochastik 2023-28

Erhöhtes Anforderungsniveau – Hilfsmittelfreier Prüfungsteil 2023-35
Erhöhtes Anforderungsniveau – Analysis 1 2023-46
Erhöhtes Anforderungsniveau – Analytische Geometrie 2023-56
Erhöhtes Anforderungsniveau – Stochastik 2023-63

Abiturprüfung 2024 (Auswahl) .... **www.stark-verlag.de/mystark**

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 freigegeben sind, kann eine Auswahl davon auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Auch die Original-Prüfungsaufgaben 2019, 2020 und 2021 können auf MySTARK heruntergeladen werden.

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online auf **MySTARK** Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ihren persönlichen Zugangscode finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autoren der Lösungen:

Dr. Jürgen Leitz: Original-Abiturprüfungen 2019 bis 2021
Verlagsredaktion: Original-Abiturprüfungen 2022 und 2023

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit dem vorliegenden Buch geben wir Ihnen eine **optimale** Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung** in **Hamburg**.

- Im ersten Teil des Buches erhalten Sie zahlreiche **Informationen zum Abitur**, die für eine gezielte Vorbereitung auf die Abiturprüfung hilfreich und wichtig sind. Hierzu gehören die komplette Auflistung der Schwerpunktthemen für das **Abitur**, die **Hinweise zum Prüfungsablauf** sowie alles Wissenswerte zum Aufbau und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Weiter geben wir Ihnen eine Vielzahl **praktischer Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als auch während der Prüfung (Klausuren) ermöglichen, gestellte Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Sie finden in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2022 und 2023 (Auswahl)** abgedruckt. Die Aufgaben **2019**, **2020, 2021** und **2024 (Auswahl)** stehen Ihnen auf der **Plattform MySTARK** zum Download zur Verfügung. Somit können Sie sich ein Bild davon machen, welche Anforderungen an die Abiturprüfung in den vergangenen Jahren gestellt wurden.
- Zu allen Aufgaben finden Sie vollständige und schülergerechte **Lösungsvorschläge**. Zusätzlich werden in den **Hinweisen und Tipps**, die zwischen Aufgabe und Lösung stehen, die Lösungsansätze dargestellt, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Hier können Sie nachlesen, wenn Sie nicht wissen, wie Sie mit der Lösung einer Aufgabe anfangen sollen. Die Hinweise und Tipps sind hierarchisch nach aufsteigender **Hilfestellung** sortiert, sodass Sie nach dem Lesen des ersten Tipps nochmals nachdenken sollten, ob Sie jetzt die Lösung schaffen. Erst dann lesen Sie den zweiten Hinweis, der den Lösungsansatz genauer beschreibt.
- Damit Sie in diesem Buch passende Aufgaben zum Üben heraussuchen können, z. B. für die Vorbereitung auf eine anstehende Klausur, finden Sie gleich am Anfang ein **Stichwortverzeichnis**.
- Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2025 unter:
  www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung auf das Abitur und bei Ihrer Prüfung, nicht nur im Fach Mathematik!

Dr. Jürgen Leitz und STARK Verlag

Allgemeine Hinweise zum Zentralabitur

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

Zentrale schriftliche Prüfung

Die Abiturprüfung bildet den Abschluss der zweijährigen Studienstufe, die in Hamburg als Profiloberstufe ausgestaltet ist. An allen allgemeinbildenden und den berufsbildenden Gymnasien sowie an den Stadtteilschulen in Hamburg wird das Abitur mit zentraler Aufgabenstellung durchgeführt. Die Abituraufgaben werden in der Hamburger Behörde für Schule und Bildung entwickelt.
Das Abitur kann in Mathematik auf dem grundlegenden oder dem erhöhten Anforderungsniveau abgelegt werden. Ob das Anforderungsniveau in Mathematik grundlegend oder erhöht ist, wurde vor dem Eintritt in die Profiloberstufe verbindlich festgelegt, die Prüfung muss in dem gewählten Niveau abgelegt werden.
Den ersten von vier Aufgabenblöcken bildet der **hilfsmittelfreie Teil**. Im Rahmen dieses Aufgabenblocks müssen **mehrere kleinere** Aufgaben, die die Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie bzw. Lineare Algebra und Stochastik umfassen, bearbeitet werden. Die Bearbeitung dieses Teils muss – wie der Name schon andeutet – ohne Hilfsmittel wie Taschenrechner und Formelsammlung erfolgen.

Die prüfungsrelevanten Inhalte der Studienstufe

1.1 Von der Änderungsrate zum Bestand

Funktionale Zusammenhänge

- Darstellen und Anwenden funktionaler Zusammenhänge mit den untenstehenden Funktionsklassen, Kennen von Besonderheiten und Nutzen dieser Funktionsklassen in Sachzusammenhängen
  - ganzrationale Funktionen
  - einfache gebrochen-rationale Funktionen
  - einfache Wurzelfunktionen

  Unter einfachen Funktionen werden Funktionen verstanden, deren jeweiliger Graph aus dem Graphen zu $f(x) = \frac{1}{x}$ bzw. $f(x) = \sqrt{x}$ durch Verschieben in x-Richtung und y-Richtung, Strecken in x- oder y-Richtung sowie Spiegeln an den Koordinatenachsen hervorgehen kann.
- Beschreibung und Nutzung der Auswirkung von Parametervariationen in einer Funktionsvorschrift für den Graphen einer Funktion
- Erstellung, Interpretation und Beurteilung von Modellen
- Berechnungen mit Parametern in einer Funktionsvorschrift, insbesondere unter Vorgabe und Einsetzen konkreter Werte, sowie Interpretation der Ergebnisse

- Erkennung von Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung anhand der Exponenten der freien Variablen im Funktionsterm ganzrationaler Funktionen, Nutzung dieser Eigenschaft für Argumentationen und Berechnungen
- Erkennung von Punktsymmetrie zum Ursprung am Funktionsterm einfacher gebrochen-rationaler Funktionen
- Beschreibung des Verhaltens im Unendlichen
- Bestimmung von senkrechten und waagerechten Asymptoten

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- Bearbeitung komplexerer Aufgabenstellungen auf derselben inhaltlichen Basis
- Nachweis von Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung u. a. mithilfe der Zusammenhänge $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$

Gleichungen

- Bestimmung der Koeffizienten ganzrationaler Funktionen durch Aufstellen linearer Gleichungssysteme (Steckbriefaufgaben)
- Gleichungslösen als Hilfsmittel, um Fragestellungen in funktionalen Zusammenhängen zu lösen
  - geeignete Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen
  - grundlegende algebraische Umformungen, z. B. Ausklammern der Unbekannten
  - tabellarisches Lösen von Gleichungen
  - grafisches Lösen von Gleichungen
  - Lösen biquadratischer Gleichungen mittels Substitution

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- Bearbeitung komplexerer Aufgabenstellungen auf derselben inhaltlichen Basis
- Gleichungslösen in Abhängigkeit von Parametern

Mittlere und lokale Änderungsrate

- Interpretation der mittleren Änderungsrate in Sachzusammenhängen und als Sekantensteigung
- Beschreibung der Annäherung der mittleren Änderungsrate an die lokale Änderungsrate
- Interpretation der lokalen Änderungsrate an einer Stelle in Sachzusammenhängen und als Tangentensteigung
- Berechnung der Tangentensteigung an einer Stelle mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten an einigen Beispielen
- Beschreibung der Ableitungsfunktion als Funktion der lokalen Änderungsraten
- Aufstellung der Tangentengleichung
- Berechnung von Steigungswinkeln mithilfe des Tangens
- Anwendung der Ableitungsregeln
  - Potenzregel
  - Faktorregel
  - Summenregel
- Bestimmung höherer Ableitungen
- Herleitung des Graphen der Ableitungsfunktion aus dem gegebenen Graphen einer Funktion

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

Bearbeitung komplexerer Aufgabenstellungen auf derselben inhaltlichen Basis

II Analysis 1

1. Ein ICE fährt bis 15:00 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit. Von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr nimmt seine Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt ab. Ab 15:02 Uhr fährt der ICE wieder mit konstanter Geschwindigkeit.

   Die Geschwindigkeitsentwicklung von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr wird zunächst mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

   $f(x) = 30x^3 - 90x^2 + 240$

   beschrieben. Dabei ist x die seit 15:00 Uhr vergangene Zeit in Minuten und f(x) die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde.

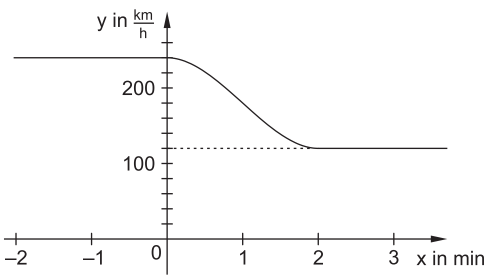


Abb. 1

Die Abbildung 1 zeigt für $0 \leq x \leq 2$ den Graphen von f; außerdem stellt sie die Geschwindigkeiten des ICE vor 15:00 Uhr und nach 15:02 Uhr dar.

	Punkte
a) **Bestimmen** Sie die Geschwindigkeit, die der ICE eine halbe Minute nach 15:00 Uhr hat. **Zeigen** Sie, dass die Geschwindigkeit in der ersten halben Minute nach 15:00 Uhr um einen kleineren Betrag abnimmt als in der darauffolgenden halben Minute.	4
b) **Ermitteln** Sie den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt.	4
c) **Berechnen** Sie die Länge der Strecke, die der ICE in den ersten zwei Minuten nach 15:00 Uhr zurücklegt.	3

d) **Untersuchen** Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Wenn sich die Abnahme der Geschwindigkeit von 15:01 Uhr an nicht mehr verändern würde, dann käme der ICE von diesem Zeitpunkt an nach drei Kilometern zum Stehen. 5

Nun werden alle in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_p der Schar mit

$$f_p(x) = \frac{p}{4} \cdot x^4 + (30 - p) \cdot x^3 + (p - 90) \cdot x^2 + 240$$

und $p \in \mathbb{R}$ daraufhin untersucht, ob sie für $0 \leq x \leq 2$ die Entwicklung der Geschwindigkeit des ICE von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr passend zur angenommenen Geschwindigkeitsbeschreibung beschreiben könnten.
Die Abbildung 2 ist im Vergleich zur Abbildung 1 um die Graphen G_{-80} und G_{250} der Funktionen f_{-80} bzw. f_{250} ergänzt.

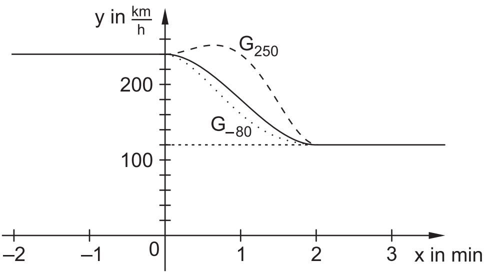


Abb. 2

e) Der Übergang von der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit vor 15:00 Uhr zur Fahrt nach 15:00 Uhr erfolgt sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeit als auch hinsichtlich der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit ohne Sprung. Die Funktionen f_p werden diesen beiden Anforderungen gerecht.

Geben Sie die zugehörigen Bedingungen in mathematischer Schreibweise **an**, die die Funktionen f_p erfüllen. 2

f) **Geben** Sie denjenigen Wert von p **an**, für den $f_p(x)$ mit dem Term der Funktion f übereinstimmt.

Beurteilen Sie für jede der Funktionen f_{-80} und f_{250} mithilfe des zugehörigen Graphen, ob die Funktion die Geschwindigkeitsentwicklung innerhalb des Zeitraums von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr passend beschreiben könnte (siehe Abbildung 2). 3

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1 a

Geschwindigkeit eine halbe Minute nach 15:00 Uhr

- Die gesuchte Geschwindigkeit entspricht dem Funktionswert von f bei $x = 0{,}5$.

Vergleich der Abnahmen in den ersten beiden halben Minuten

- Sie benötigen zusätzlich zu $f(0{,}5)$ noch $f(0)$ und $f(1)$.
- Vergleichen Sie die Differenzen $f(0{,}5) - f(0)$ mit $f(1) - f(0{,}5)$.

Teilaufgabe 1 b

Zeitpunkt der stärksten Geschwindigkeitsabnahme

- Die stärkste Abnahme liegt an der Wendestelle vor.
- Sie benötigen zur Lösung der Aufgabe die 1. und die 2. Ableitungsfunktion von f.

Teilaufgabe 1 c

In den ersten zwei Minuten zurückgelegte Strecke

- Beachten Sie, dass nach der Länge der zurückgelegten Strecke gefragt ist, die Funktion f aber die Geschwindigkeit des ICE angibt.
- Die zurückgelegte Strecke in einem bestimmten Zeitraum ergibt sich aus der Fläche, die sich in einem bestimmten Intervall zwischen dem Graphen von f und der x-Achse befindet.
- Sie müssen zur Berechnung der Strecke ein passendes Integral lösen.
- Achtung: x gibt die Zeit in Minuten an, $f(x)$ aber die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde. Sie benötigen also für Ihre Berechnung einen entsprechenden Vorfaktor, der dem Umrechnungsfaktor von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ entspricht.

Teilaufgabe 1 d

Untersuchen der Aussage

- 15:01 Uhr entspricht $x = 1$.
- Berechnen Sie mithilfe von f die Geschwindigkeit um 15:01 Uhr.
- Berechnen Sie mithilfe von f' die Geschwindigkeitsänderung um 15:01 Uhr.
- Eine ab 15:01 Uhr konstante Abnahme der Geschwindigkeit entspräche im Diagramm einer fallenden Geraden für $x \geq 1$. Die Neigung (bzw. negative Steigung) dieser Geraden wäre gleich der zu diesem Zeitpunkt momentanen Geschwindigkeitsabnahme.
- Folgende geometrische Betrachtung lässt dann einen Rückschluss auf den zurückgelegten Weg bis zum Stillstand zu: Die genannte Gerade bildet gemeinsam mit der vertikalen Geraden $x = 1$ sowie der x-Achse ein Dreieck. Der Flächeninhalt des Dreiecks entspricht dem zurückgelegten Weg.

Lösung

1. a) Die Geschwindigkeit des ICE eine halbe Minute nach 15:00 Uhr ergibt sich aus dem Funktionswert der Funktion f bei $x = 0{,}5$:

$$f(0{,}5) = 30 \cdot 0{,}5^3 - 90 \cdot 0{,}5^2 + 240 = 221{,}25$$

Eine halbe Minute nach 15:00 Uhr hat der ICE eine Geschwindigkeit von $221{,}25\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Die Geschwindigkeit um 15:00 Uhr entspricht $f(0) = 240$ und die Geschwindigkeit eine Minute nach 15:00 Uhr:

$$f(1) = 30 \cdot 1^3 - 90 \cdot 1^2 + 240 = 180$$

Es gilt folglich:

$$f(0{,}5) - f(0) = 221{,}25 - 240 = -18{,}75$$

$$f(1) - f(0{,}5) = 180 - 221{,}25 = -41{,}25$$

Die Geschwindigkeit nimmt in der ersten halben Minute um $18{,}75\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und in der zweiten halben Minute um $41{,}25\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ab. In der zweiten halben Minute ist die Abnahme somit größer. (w. z. z. w.)

b) Die stärkste Abnahme der Funktion f befindet sich an deren Wendestelle. Dazu werden zunächst die 1. und 2. Ableitungsfunktion ermittelt:

$$f'(x) = 90x^2 - 180x$$

$$f''(x) = 180x - 180$$

Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist $f''(x) = 0$ und es folgt:

$$180x - 180 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Da aus Abbildung 1 ersichtlich ist, dass sich im Bereich $0 < x < 2$ eine Wendestelle befindet, muss diese sich bei $x = 1$ befinden. Die Geschwindigkeit nimmt folglich eine Minute nach 15:00 Uhr am stärksten ab, also um 15:01 Uhr.

c) Die Länge ℓ der Strecke (in Kilometern), die der ICE in den ersten zwei Minuten nach 15:00 Uhr zurücklegt, ergibt sich aus folgendem Integral:

$$\ell = \frac{1}{60} \cdot \int_0^2 f(x)\,dx$$

Anmerkung:
Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist notwendig, da x die Zeit in Minuten, f(x) aber die Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ angibt. Dieser Faktor entspricht dem Umrechnungsfaktor von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$.

Eine Stammfunktion F von f ist:

$$F(x) = \frac{30}{4}x^4 - \frac{90}{3}x^3 + 240x = 7{,}5x^4 - 30x^3 + 240x$$

Für die Länge ℓ der Strecke folgt dann:

$$\ell = \frac{1}{60} \cdot \left[7{,}5x^4 - 30x^3 + 240x\right]_0^2 = \frac{1}{60} \cdot (7{,}5 \cdot 2^4 - 30 \cdot 2^3 + 240 \cdot 2 - 0) = 6$$

Der ICE legt in den ersten zwei Minuten 6 Kilometer zurück.

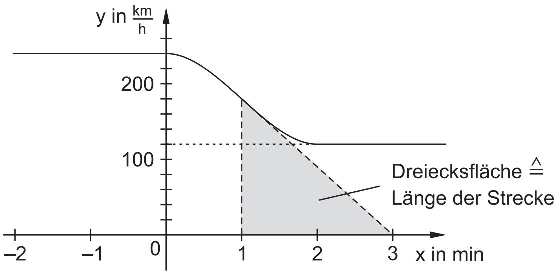
d) Die Geschwindigkeit des ICE um 15:01 Uhr entspricht dem Funktionswert von f an der Stelle $x = 1$:

$$f(1) = 30 \cdot 1^3 - 90 \cdot 1^2 + 240 = 180$$

Die momentane Geschwindigkeitsänderung des ICE um 15:01 Uhr entspricht dem Funktionswert der Ableitungsfunktion f an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = 90 \cdot 1^2 - 180 \cdot 1 = -90$$

Bei einer Geschwindigkeit um 15:01 Uhr von 180 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und einer ab dann konstanten Geschwindigkeitsänderung von 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ pro Minute kommt der ICE nach zusätzlichen zwei Minuten zum Stehen.
Die Bewegung lässt sich im Diagramm in Abbildung 1 folgendermaßen darstellen:



Die zwischen 15:01 Uhr bis zum Stillstand bei konstanter Abnahme der Geschwindigkeit zurückgelegte Streckenlänge ℓ_0 ergibt sich über die Dreiecksfläche (siehe Skizze):

$$\ell_0 = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 180 = 3$$

Die Aussage ist demnach richtig, der Zug käme ab 15:01 Uhr nach drei Kilometern zum Stehen.

e) Die beiden Bedingungen sind:

$$f_p(0) = 240$$

$$f_p'(0) = 0$$