2025

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Niedersachsen

Mathematik e

+ *Übungsaufgaben*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

STARK

Inhaltsverzeichnis

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MySTARK.

Abiturprüfung 2023

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MySTARK** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2021 bis 2024** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2025 unter:
www.stark-verlag.de

Autor

Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2021 bis 2024)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2025** im **Erhöhten Anforderungsniveau** in **Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Erhöhte Anforderungsniveau** viele **Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2025**. Die Aufgaben sind dabei auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2021 bis 2024**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MySTARK**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2021 bis 2024**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Die Zugangscode zu MySTARK finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Josef Rolfs

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 werden Teile davon länderübergreifend gestellt.
Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen: dem **Prüfungsteil A**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und dem **Prüfungsteil B**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A** müssen insgesamt **sechs Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie bearbeitet werden. Die Aufgaben werden in die Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2 unterteilt.
Die Aufgabengruppe 1 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II. Den Schülerinnen und Schülern werden zwei Aufgaben aus der Analysis, eine aus der Stochastik und eine aus der Analytischen Geometrie vorgelegt, die alle vier bearbeitet werden müssen.
Die Aufgabengruppe 2 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II, wobei mindestens eine Teilaufgabe auch den Anforderungsbereich III erreicht. Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu jedem der drei Sachgebiete jeweils zwei Aufgaben, aus denen sie insgesamt zwei auswählen, die sie bearbeiten.
Die Aufgaben des Prüfungsteils A sind mit jeweils 5 Bewertungseinheiten gleichgewichtet und gehen **zu 25 %** in die Gesamtnote ein.
Im **Prüfungsteil B** werden den Schülerinnen und Schülern je zwei Aufgaben aus der Analysis, aus der Stochastik und aus der Analytischen Geometrie vorgelegt. Sie müssen aus jedem der drei Bereiche jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.
In der Analysisaufgabe können 40 Bewertungseinheiten erreicht werden, in der Stochastik und der Analytischen Geometrie jeweils 25. Die Aufgaben des Wahlteils gehen insgesamt **zu 75 %** in die Gesamtnote ein.

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit beträgt **330 Minuten**. Zu Beginn der Prüfung werden sowohl die Aufgaben des Prüfungsteils A als auch des Prüfungsteils B ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst, wann sie den Prüfungsteil A abgeben. Dies muss spätestens nach 100 Minuten erfolgen. Anschließend erhalten sie die zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Prüfungsteil B

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:

- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.
In der Abiturprüfung sollen die Schülerinnen und Schüler die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:

- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.

Weiter sind zur Abiturprüfung das auf den Seiten des IQB veröffentlichte „Dokument mit mathematischen Formeln“ und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2025“ weitere Angaben gemacht.
Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

2.1 Analysis

Einführungsphase

Elementare Funktionenlehre
- Funktionsbegriff
- Potenzfunktionen (auch Wurzelfunktionen)
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Exponentialfunktionen
- $y = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen
- Parametervariationen
- ganzrationale Funktionen
- Nullstellen (Linearfaktorzerlegung)
- Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten
- Umkehrfunktionen: Definitions- und Wertemenge, Zusammenhang zwischen Graph einer Funktion und der zugehörigen Umkehrfunktion

Ableitungen
- mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante
- lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente
- Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen
- Ableitungsfunktion
- Tangenten- und Normalengleichung
- Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktion
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte
- Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^{\neq 0})$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$
- Summen, Faktor- und Potenzregel
- notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte
- Ableitung ganzrationaler Funktionen
- Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen
- Lösen linearer Gleichungssysteme

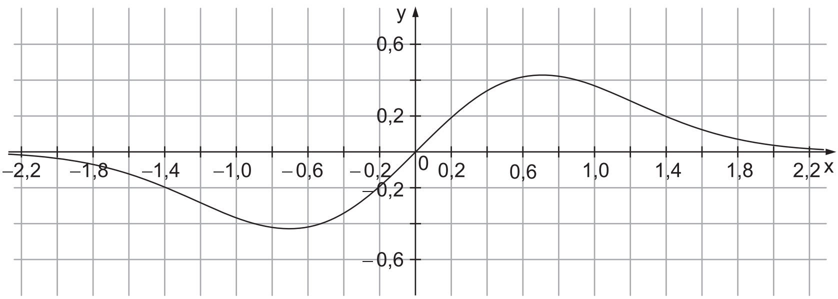
Qualifikationsphase

Differentialrechnung
- Gauß-Algorithmus
- ganzrationale Funktionen bestimmen
- Produkt- und Kettenregel
- abschnittsweise definierte Funktionen
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei abschnittsweise definierten Funktionen
- Funktionenscharen

Integralrechnung
- Rekonstruktion aus Änderungsraten
- Integral als Grenzwert
- Stammfunktionen zu $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\})$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$

Analysis

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen von f.

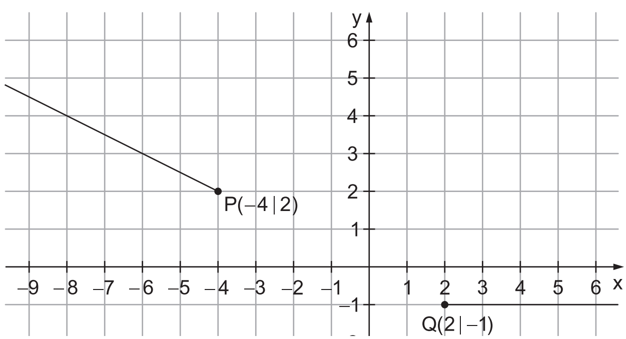


a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes der Kurve.

c) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit $x = a$ $(a > 0)$ begrenzen ein Flächenstück.
Bestimmen Sie diejenige Zahl a, für die diese Fläche die Maßzahl $\frac{1}{4}$ aufweist.

2. Die beiden Halbgeraden des Schaubildes sollen durch den Graphen einer Polynomfunktion g möglichst geringen Grades verbunden werden. Die Übergänge sollen dabei glatt und krümmungsruckfrei sein.
Erläutern Sie die von Ihnen gemachten Forderungen und den daraus folgenden Ansatz. g(x) soll nicht bestimmt werden.

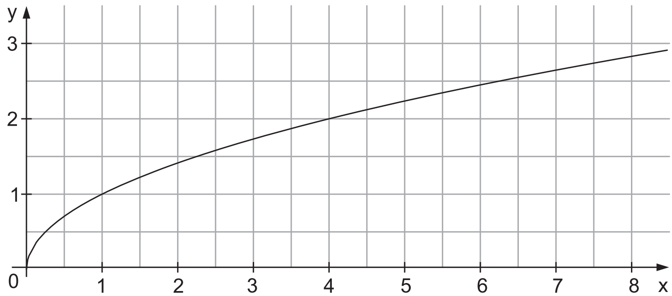


3. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

b) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Gerade mit $y = a$ mit dem Graphen von f genau zwei Schnittpunkte hat.

4. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x \geq 0$.



a) Zeigen Sie, dass nur an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ Ableitung und Funktionswert übereinstimmen.

b) Untersuchen Sie, ob es auf dem Graphen von f einen Punkt P gibt, sodass die Tangente durch den Punkt $S(0\,|\,1)$ verläuft.

c) Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche, die die y-Achse, die Gerade mit $y = 1$ und der Graph von f begrenzen.

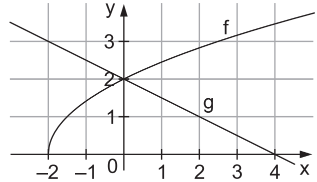
5. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}e^x + 2$.

a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge D(f) und die Wertemenge W(f) an und begründen Sie, dass f umkehrbar ist.

b) Bestimmen Sie den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion und geben Sie $D(f^{-1})$ an. Skizzieren Sie beide Graphen in einem Koordinatensystem.

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden mit der Steigung –1, die auf beiden Graphen senkrecht steht.

6. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2x + 4}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 2$.



a) Zeigen Sie, dass durch $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 4}}$ die Ableitung von f(x) gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und die Gleichung der Normale im Punkt $P(0\,|\,2)$ des Graphen von f.

c) Gegeben ist die Funktion h_a mit $h_a(x) = \sqrt{a \cdot x + 4}$ und $a > 0$.
Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass die Gerade g die Normale im Punkt $P(0|2)$ des Graphen von h_a ist.

7. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

a) Zeigen Sie, dass f über $D = \mathbb{R}^{\geq 1}$ umkehrbar ist.

b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte, die sowohl auf dem Graphen von f als auch auf dem Graphen von f^{-1} liegen.

c) Die Graphen der Funktionen f und f^{-1} begrenzen ein Flächenstück.
Skizzieren Sie es und berechnen Sie seine Maßzahl.

Stochastik

8. In einer Urne befinden sich 1 blaue, 4 rote und 5 grüne Kugeln.

a) Aus der Urne wird ohne Zurücklegen 3-mal gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Es werden genau 2 rote Kugeln gezogen.
B: Es werden eine blaue, eine rote und eine grüne Kugel gezogen.
C: Es wird 3-mal dieselbe Farbe gezogen.

b) Es wird nun 8-mal ohne Zurücklegen gezogen.
Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit p einer beliebigen Zugfolge an, die auf das Ergebnis „eine blaue, 3 rote und 4 grüne Kugeln werden gezogen“ führt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
D: Es werden eine blaue, 3 rote und 4 grüne Kugeln gezogen.

9. Es wird mit einem Würfel geworfen, der durch Bleieinschlüsse manipuliert wurde. Die Wahrscheinlichkeit p für die Augenzahl 6 wurde dadurch erhöht, die übrigen fünf Augenzahlen sind aber gleich wahrscheinlich.

a) Der Würfel wird nun zweimal geworfen.
Ermitteln Sie für den Fall, dass $p = \frac{1}{4}$ ist, die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Man erhält die Augensumme 12.
B: Man erhält die Augensumme 2.
Stellen Sie einen Term auf, mit dem das folgende Ereignis berechnet werden kann:
C: Man erhält mindestens die Augensumme 10.

b) Beim dreifachen Würfeln beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine 6 gewürfelt wird, genau 93,6 %.
Ermitteln Sie für diesen Fall p.

Da die Übergangskurve in P und Q krümmungsruckfrei anschließen soll, muss sie in P bzw. Q dieselbe Krümmung besitzen wie die entsprechende Halbgerade. Da beide Halbgeraden die Krümmung 0 besitzen, muss also zusätzlich gelten:

$g''(-4)=0$ und $g''(2)=0$ (Diese Bedingungen sorgen für die zweimalige Differenzierbarkeit.)

Wegen dieser 6 notwendigen Bedingungen benötigt man einen Ansatz mit 6 Formvariablen, also ein Polynom 5. Grades:

$g(x)=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3+d\cdot x^2+e\cdot x+f$

3. a) Damit f(x) definiert ist, muss gelten:

$$
\begin{aligned}
& -x^2+6x-8 \ge 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-6x+8 \le 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-6x+9 \le -8+9 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-3)^2 \le 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |x-3| \le 1 \\
\Leftrightarrow\quad & x-3 \ge -1 \ \wedge\ x-3 \le 1 \\
\Leftrightarrow\quad & x \ge 2 \ \wedge\ x \le 4 \\
\Leftrightarrow\quad & 2 \le x \le 4
\end{aligned}
$$

$\mathbb{D}_f=[2;4]$

b) Untersuchung auf Schnittstellen:

$$
\begin{aligned}
& f(x)=a \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{-x^2+6x-8}=a \qquad \text{Für } a<0 \text{ gibt es keine Schnittstelle.} \\
\underset{a\ge 0}{\Leftrightarrow}\quad & -x^2+6x-8=a^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-6x+9=-a^2+1 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-3)^2=-a^2+1
\end{aligned}
$$

Damit es zwei Schnittstellen gibt, muss gelten:

$-a^2+1>0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2<1 \quad\underset{(a\ge 0)}{\Leftrightarrow}\quad 0\le a<1$

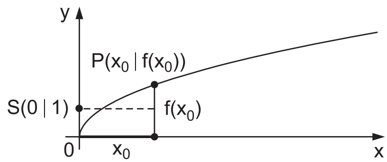
Für alle $a\in[0;1[$ besitzen die Kurve und die Gerade genau zwei Schnittpunkte.

4. a) $f'(x)=f(x) \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x} \quad\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\quad \dfrac{1}{2}=x$

Damit ist $x=\frac{1}{2}$ die einzige Stelle, an der Ableitung und Funktionswert übereinstimmen.

b) Eine Gerade, die durch $S(0\,|\,1)$ und $P(x_0\,|\,f(x_0))$ verläuft, besitzt den y-Achsenabschnitt 1 und hat die Steigung $\frac{f(x_0)-1}{x_0}$. Ihre Gleichung hat also die Form $y=\frac{f(x_0)-1}{x_0}\cdot x+1$.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)-1}{x_0} \quad (x_0 > 0)$$



$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}-1}{x_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = 2x_0 - 2\sqrt{x_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x_0 - 2\sqrt{x_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \sqrt{x_0} \cdot (\sqrt{x_0} - 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = 0 \quad \vee \quad x_0 = 4$$

Es gilt:

$y = \frac{1}{4} \cdot x + 1$ durch $P(4|2)$

Zusätzlich besitzt der Graph der Wurzelfunktion an der Stelle $x = 0$ eine senkrechte Tangente, die ebenfalls durch $S(0|1)$ verläuft.

c) $A = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})\, dx = \left[x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

5. a) $D(f) = \mathbb{R}$ und $W(f) = \mathbb{R}^{>2}$

Wegen $f'(x) = \frac{1}{3} e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f streng monoton steigend und somit umkehrbar über $\mathbb{R}$.

b) Vertauschen von x und y liefert:

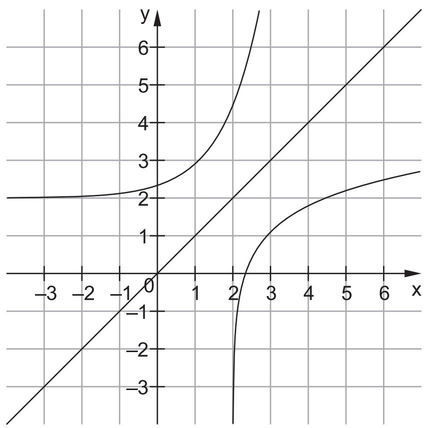
$x = \frac{1}{3} e^y + 2$ mit $y \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^{>2}$

$$\Leftrightarrow \quad x - 2 = \frac{1}{3} e^y$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot (x-2) = e^y$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \ln(3(x-2))$$

Also ist $f^{-1}(x) = \ln(3(x-2))$ mit $D(f^{-1}) = \mathbb{R}^{>2}$.



c) Die gesuchte Gerade soll die Steigung –1 aufweisen. Das heißt, dass die Tangenten an die Graphen die Steigung 1 haben müssen.

$f'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} e^x = 1$

$\Leftrightarrow \quad e^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(3)$

9. a) Um die Augensumme 12 zu erhalten, muss zweimal die Augenzahl 6 gewürfelt werden. Damit ist:

$$P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

Um die Augensumme 2 zu erhalten, muss zweimal die Augenzahl 1 gewürfelt werden.
Die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu würfeln, beträgt $\left(1-\frac{1}{4}\right):5=\frac{3}{20}$. Somit ist:

$$P(B)=\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{20}=\frac{9}{400}$$

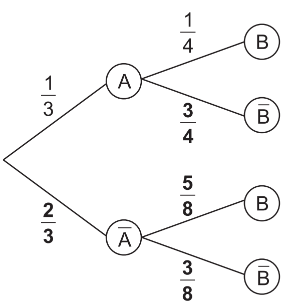
Um mindestens die Augensumme 10 zu erzielen, muss man entweder 4–6, 6–4, 5–5, 5–6, 6–5 oder 6–6 würfeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine 4 oder eine 5 zu würfeln, beträgt $\frac{3}{20}$.
Es folgt:

$$P(C)=\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{20}+\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{20}+\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

b) Mit der binomialverteilten Zufallsgröße X: „Anzahl der Sechsen“ ($n=3$, p unbekannt) ergibt sich der folgende Ansatz:

$$\begin{aligned}
P(X\geq 1)=0{,}936 \quad &\Leftrightarrow \quad 1-P(X=0)=0{,}936\\
&\Leftrightarrow \quad P(X=0)=0{,}064\\
&\Leftrightarrow \quad \binom{3}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^3=0{,}064\\
&\Leftrightarrow \quad (1-p)^3=\frac{64}{1\,000}\\
&\Leftrightarrow \quad 1-p=\frac{4}{10}\\
&\Leftrightarrow \quad p=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

10. a)



$\frac{1}{12}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{5}{12}$

$\frac{1}{4}=0{,}25 \quad \left(\frac{2}{3}\cdot x=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{8}\right)$

A: Anne fehlt am Montag
$\overline{A}$: Anne fehlt am Montag nicht
B: Bernd fehlt am Montag
$\overline{B}$: Bernd fehlt am Montag nicht

Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 A

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau, der sich dann wieder vollständig auflöst. An einem bestimmten Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für $0 \leq x \leq 4$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$ beschrieben.

Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und f(x) die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ an.

		Punkte
a)	Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat. Begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.	5
b)	Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt. Zeigen Sie, dass der zugehörige Wert der momentanen Änderungsrate etwa $2{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt.	4
c)	Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist. Begründen Sie Ihre Angabe.	4

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4 - x)^3$.
s ist eine Stammfunktion von f.

d)	Der Stau entsteht um 06:00 Uhr. Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: Für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr kann die Staulänge durch die Funktion s angegeben werden. Prüfen Sie, ob sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.	5
e)	Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:00 Uhr bis 07:30 Uhr und geben Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge an.	5

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit
$h_k(x) = (x - 3)^k + 1$ und $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$.

f)	Ermitteln Sie die Koordinaten derjenigen Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.	4
g)	Der Graph von h_5 und die Gerade durch die Punkte $P(3\,|\,1)$ und $Q(4\,|\,2)$ schließen zwei Flächenstücke ein. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man diese beiden Flächenstücke um die x-Achse rotieren lässt.	7

h) Beurteilen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage:
Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h'_k Tangente an den Graphen von h_k ist. 6

40

TIPP **Lösungshinweise zum Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 A**

Teilaufgabe a

Nennen der Zeitpunkte mit momentaner Änderungsrate null
f(x) gibt die momentane Änderungsrate der Staulänge an.

Bestimmen Sie die Nullstellen von f(x).

Beachten Sie, dass Sie diese noch in die entsprechenden Zeitpunkte umrechnen müssen.

Begründen anhand des Funktionsterms
Die besondere Form von f(x) lässt eindeutig auf alle Nullstellen schließen.

Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

Teilaufgabe b

Bestimmen des Zeitpunktes mit maximaler Zunahme der Staulänge
Sie benötigen diejenige Stelle, an der f(x) maximal ist.

Nutzen Sie die **fMax**-Funktion des Rechners zur Berechnung der Stelle im Intervall [0; 4].

Da Sie den Zeitpunkt angeben sollen, müssen Sie auch hier noch umrechnen.

Zeigen, dass die momentane Änderungsrate etwa 2,2 $\frac{km}{h}$ beträgt
Setzen Sie die oben bestimmte Stelle in f(x) ein.

Dokumentieren Sie den Rechenweg. Das Ergebnis ist ja vorgegeben.

Teilaufgabe c

Angeben des Zeitpunktes der längsten Staulänge
Das Vorzeichen von f(x) gibt an, ob der Stau zu- oder abnimmt.

Zwischen den ersten beiden Nullstellen ist f(x) positiv und zwischen den beiden anderen negativ.

Die maximale Staulänge wird an der zweiten Nullstelle von f(x) erreicht.

Geben Sie den entsprechenden Zeitpunkt an.

Lösungsvorschlag zum Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 A

a) Nennen der Zeitpunkte mit momentaner Änderungsrate null:
f(x) wird null an den Stellen 0, $\frac{8}{5}$ und 4.
Es handelt sich also um die Zeitpunkte 6:00 Uhr, 7:36 Uhr und 10:00 Uhr.

Begründen anhand des Funktionsterms:
Da der Term aus vier Linearfaktoren (einer doppelt) besteht, wird sein Wert genau dann null, wenn mindestens einer der Faktoren den Wert null hat. Also gibt es genau drei Nullstellen (eine davon ist eine doppelte Nullstelle).

b) Bestimmen des Zeitpunktes mit maximaler Zunahme der Staulänge:
An der gesuchten Stelle x_1 soll f(x) maximal werden. Mit der **fMax**-Funktion des Rechners ergibt sich die Stelle:

$x_1 = -\frac{2}{5} \cdot (\sqrt{6} - 4) = 0{,}620\ldots$

$60 \cdot x_1 = 37{,}212\ldots$

Um etwa 06:37 Uhr nimmt die Staulänge am stärksten zu.

$x \cdot (8-5 \cdot x) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right)^2 \to f(x)$	*Fertig*
$\text{fMax}(f(x),x)\|0\le x\le 4$	$x=\frac{-2\cdot(\sqrt{6}-4)}{5}$
$x=\frac{-2\cdot(\sqrt{6}-4)}{5}$	$x=0.620204$
$60 \cdot 0.62020410288672$	37.2122

Zeigen, dass die momentane Änderungsrate etwa $2{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt:

$f(x_1) = 2{,}169\ldots$

Die momentane Änderungsrate beträgt dann etwa $2{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$f(x)\|x=\frac{-2\cdot(\sqrt{6}-4)}{5}$	2.16921

c) Angeben des Zeitpunktes der längsten Staulänge:
Die momentane Änderungsrate der Staulänge ist f(x). Sie ist positiv für $0 < x < \frac{8}{5}$ und negativ für $\frac{8}{5} < x < 4$. Damit nimmt die Staulänge bis zur Stelle $\frac{8}{5}$ zu und danach wieder ab.
Die maximale Staulänge wird also um 07:36 Uhr erreicht.

d) Begründen der Aussage:
Da s eine Stammfunktion von f ist, gilt $s'(x) = f(x)$. Damit wird die Änderung der Staulänge korrekt beschrieben.
Wegen $s(0) = 0$ ist die Staulänge um 6:00 Uhr ebenfalls korrekt.
Also ist die Aussage richtig.

Prüfen, ob sich um 10:00 Uhr der Stau aufgelöst hat:
Es ist $s(4) = 0$.
Damit hat sich der Stau um 10:00 Uhr aufgelöst.

e) Berechnen der Zunahme der Staulänge:
$s(1{,}5) - s(0) = 2{,}197\ldots$
Der Stau nimmt in diesem Zeitraum um etwa 2,2 km zu.

$\left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3 \to s(x)$	*Fertig*
$s(1.5)-s(0)$	2.19727
$\frac{s(1.5)-s(0)}{1.5}$	1.46484

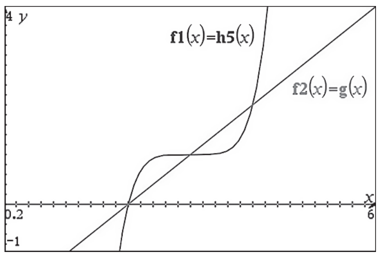
Angeben der durchschnittlichen Änderungsrate der Staulänge:
$$\frac{s(1{,}5) - s(0)}{1{,}5} = 1{,}464\ldots$$
Die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge beträgt also etwa $1{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

f) Ermitteln der Punkte, die auf allen Graphen der Schar liegen:
$h_k(x) = (x-3)^k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $k > 0$
Die Werte von h_k sind unabhängig von k, wenn $x - 3 = 0$ oder $x - 3 = 1$ ist.
Damit ergeben sich die Stellen 3 und 4.
Es handelt sich also um die Punkte $P(3\,|\,1)$ und $Q(4\,|\,2)$.

g) Bestimmen des Körpervolumens:
$h_5(x) = (x-3)^5 + 1$

Zunächst wird die Geradengleichung der Gerade g durch die Punkte P und Q ermittelt. Für die Steigung m gilt:
$$m = \frac{2-1}{4-3} = 1$$
Einsetzen von m und den Koordinaten von P in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + t$ liefert:
$$1 = 3 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = -2$$
Damit folgt:
$g(x) = x - 2$

$(x-3)^5+1 \to h5(x)$	*Fertig*
$x-2 \to g(x)$	*Fertig*



solve$(h5(x)=g(x),x)$	$x=2$ or $x=3$ or $x=4$

Berechnen der Schnittstellen:
$$h_5(x) = g(x)$$
$$\underset{\text{CAS}}{\Leftrightarrow} \quad x = 2 \;\vee\; x = 3 \;\vee\; x = 4$$

Berechnen des Volumens:
$$V_1 = \pi \cdot \int_2^3 h_5(x)^2\,dx - \pi \cdot \int_2^3 g(x)^2\,dx$$
$$= \pi \cdot \int_2^3 (h_5(x)^2 - g(x)^2)dx \underset{\text{CAS}}{=} \frac{14}{33}\pi$$

$\pi \cdot \int_2^3 \left((h5(x))^2 - (g(x))^2\right)dx$	$\frac{14 \cdot \pi}{33}$