2025

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Niedersachsen

Mathematik g

+ *Übungsaufgaben*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Stochastik

Analytische Geometrie

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MySTARK.

Abiturprüfung 2021

Abiturprüfung 2022

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MySTARK** finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2021 bis 2024** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2025 unter:
www.stark-verlag.de

Autoren
Volker Honkomp (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2023 und 2024)
Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben)
Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2021 und 2022)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2025** im **Grundlegenden Anforderungsniveau** in **Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Grundlegende Anforderungsniveau** viele **Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2025**. Diese sind auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2021 bis 2024**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MySTARK**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2021 bis 2024**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Die Zugangscode zu MySTARK finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer Volker Honkomp Josef Rolfs

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 werden Teile davon länderübergreifend gestellt.
Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen: dem **Prüfungsteil A**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und dem **Prüfungsteil B**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A** müssen insgesamt **fünf Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie bearbeitet werden. Die Aufgaben werden in die Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2 unterteilt. Die Aufgabengruppe 1 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II. Die Aufgabengruppe 2 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II, wobei mindestens eine Teilaufgabe auch den Anforderungsbereich III erreicht.
Den Schülerinnen und Schülern werden je eine Aufgabe aus der Analysis, eine aus der Stochastik und eine aus der Analytischen Geometrie vorgelegt, die alle drei bearbeitet werden müssen. Diese kommen alle aus der Aufgabengruppe 1.
Zusätzlich erhalten die Schülerinnen und Schüler zu jedem der drei Sachgebiete jeweils eine weitere Aufgabe der Aufgabengruppe 1 und eine der Aufgabengruppe 2. Aus jeder der beiden Aufgabengruppen muss von den drei Aufgaben eine beliebige bearbeitet werden.
Ein Prüfling könnte aus der Aufgabengruppe 1 beispielsweise die Analysisaufgabe und aus der Aufgabengruppe 2 die Aufgabe zur Analytischen Geometrie bearbeiten. Insgesamt hat er dann fünf Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet.
Die Aufgaben des Prüfungsteils A sind mit jeweils 5 Bewertungseinheiten gleichgewichtet. Hier können insgesamt **25 Bewertungseinheiten** erreicht werden.

Im **Prüfungsteil B** werden den Schülerinnen und Schülern je zwei Aufgaben aus der Analysis, aus der Stochastik und aus der Analytischen Geometrie vorgelegt. Sie müssen aus jedem der drei Bereiche jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.
In der Analysisaufgabe können 35 Bewertungseinheiten erreicht werden, in der Stochastik und der Analytischen Geometrie jeweils 20. Die Aufgaben des Wahlteils ergeben insgesamt **75 Bewertungseinheiten**.

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit beträgt **285 Minuten**. Zu Beginn der Prüfung werden die Aufgaben des Prüfungsteils A und alle Aufgaben des Prüfungsteils B ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst, wann sie den Prüfungsteil A abgeben. Dies muss spätestens nach 90 Minuten erfolgen. Anschließend erhalten sie die zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:
- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.
In der Abiturprüfung sollen die Schülerinnen und Schüler die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:
- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.

Weiter sind zur Abiturprüfung das auf den Seiten des IQB veröffentlichte „Dokument mit mathematischen Formeln“ und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte in der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2025“ weitere Angaben gemacht.

Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

2.1 Analysis

Einführungsphase	**Elementare Funktionenlehre** – Funktionsbegriff – Potenzfunktionen – Sinus- und Kosinusfunktion – Exponentialfunktionen – $g(x) = a \cdot f \cdot (b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen – Parametervariationen – ganzrationale Funktionen – Nullstellen (Linearfaktorzerlegung) – Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten **Ableitungen** – mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante – lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente – Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen – Ableitungsfunktion – Tangenten- und Normalengleichung – Zusammenhang zwischen Funktionsgraph und Ableitungsgraph – Monotonie und Extrempunkte – Krümmung und Wendepunkte – Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ – Summen-, Faktor- und Potenzregel – notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte – Ableitung ganzrationaler Funktionen – Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen – Lösen linearer Gleichungssysteme
Qualifikationsphase	**Differenzialrechnung** – Gauß-Algorithmus (mit GTR/CAS) – ganzrationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften bestimmen – Produktregel und Kettenregel – Parametervariation zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft **Integralrechnung** – Rekonstruktion aus Änderungsraten – Integral als Grenzwert von Produktsummen – Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Übungsaufgabe 3 (40 Min., GTR/CAS)

Ziehen aus zwei Urnen

In zwei Urnen A und B befinden sich jeweils 5 Kugeln. In der Urne A befinden sich 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. In der Urne B befinden sich 3 schwarze und 2 weiße Kugeln.

a) Ein Spieler zieht dreimal nacheinander aus der Urne A eine Kugel und legt diese nach dem Zug in die Urne A zurück.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal eine schwarze Kugel gezogen wird.

b) Der Spieler zieht nun aus der Urne A und aus der Urne B jeweils eine Kugel.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er 2 gleichfarbige Kugeln zieht.

Die gezogenen Kugeln werden zurück in die jeweiligen Urnen gelegt, sodass wieder die ursprünglichen Urnen betrachtet werden.

c) Aus beiden Urnen wird zufällig jeweils eine Kugel entnommen und in die jeweils andere Urne gelegt.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass sich die Anteile der schwarzen und weißen Kugeln in den jeweiligen Urnen nach diesem Vorgang verändert haben.

d) Alle Kugeln werden nun in eine gemeinsame Urne umgefüllt. Es befinden sich also 5 weiße und 5 schwarze Kugeln in der Urne. Es werden nun 3 Kugeln gleichzeitig herausgezogen.
Begründen Sie, dass der Term $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$ die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln genau 2 schwarze Kugeln befinden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis
(1) mithilfe des Rechners.
(2) ohne Einsatz des Rechners.

TIPP Lösungshinweise – Übungsaufgabe 3

Teilaufgabe a

Bestimmung der ersten Wahrscheinlichkeit

Beachten Sie, dass die gezogene Kugel nach jedem Zug in die Urne A zurückgelegt wird.

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln" ist daher binomialverteilt mit der Stichprobengröße $n = 3$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{5}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen „Erfolg". Sie können hierfür die **binomcdf**-Funktion des Rechners nutzen oder mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses die Komplementärregel anwenden.

Teilaufgabe b

Bestimmung der zweiten Wahrscheinlichkeit

Mit einem geeigneten Baumdiagramm lässt sich das Zufallsexperiment veranschaulichen.

Beachten Sie, dass zum Ereignis „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen gleichfarbige Kugeln" zwei Pfade im Baumdiagramm gehören: Der Spieler kann 2 schwarze oder 2 weiße Kugeln ziehen.

Wenden Sie die Pfadregeln an und bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe c

Bestimmung der dritten Wahrscheinlichkeit

Welche möglichen Ausgänge des beschriebenen Zufallsexperimentes führen zu veränderten Anteilen der schwarzen und weißen Kugeln in den Urnen?

Was lässt sich über die Anteile der schwarzen und weißen Kugeln in den Urnen aussagen, wenn der Spieler, wie in Teilaufgabe b, 2 gleichfarbige Kugeln zieht?

Argumentieren Sie mithilfe des Baumdiagramms aus Teilaufgabe b und bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe d

Begründung für die angegebene Wahrscheinlichkeit

Beachten Sie, dass der Faktor $\binom{5}{2}$ im Zähler des Terms die Anzahl der Möglichkeiten angibt, von den 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen.

Deuten Sie das Produkt $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ im Zähler und den Nenner $\binom{10}{3}$.

Geben Sie eine abschließende Begründung für die beschriebene Wahrscheinlichkeit.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit
Berechnen Sie den Wert der angegebenen Wahrscheinlichkeit und nutzen Sie dabei den Rechnerbefehl **nCr(n, k)** für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit auch ohne Einsatz des Rechners, indem Sie auf die Definition $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ des Binomialkoeffizienten zurückgreifen.

Lösungsvorschlag – Übungsaufgabe 3

a) Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln“ ist binomialverteilt mit der Stichprobengröße $n = 3$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{5}$.
Es gilt:

$$P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}$$

$$= \text{binomcdf}\left(3, \frac{2}{5}, 1, 3\right)$$

$$= 0{,}784$$

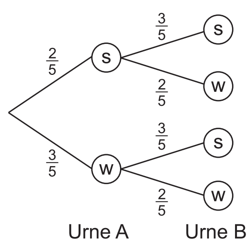
$\text{binomCdf}\left(3, \frac{2}{5}, 1, 3\right) \quad 0.784$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 78,4 % wird mindestens einmal eine schwarze Kugel gezogen.

Alternative:
Das Ergebnis erhält man auch mithilfe der Komplementärregel:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 78{,}4\ \%$$

b) Das Zufallsexperiment wird durch das nebenstehende Baumdiagramm veranschaulicht.



Zum Ereignis E_1: „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen gleichfarbige Kugeln“ gehören zwei Pfade des Baumdiagramms: ss und ww

$$P(ss) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(ww) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Daher gilt:

$$P(E_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

c) Damit sich nach dem Tauschen der Kugeln der Anteil schwarzer und weißer Kugeln in den jeweiligen Urnen verändert, muss aus der Urne A eine schwarze und aus der Urne B eine weiße Kugel oder umgekehrt aus der Urne A eine weiße und aus der Urne B eine schwarze Kugel gezogen werden.
Es handelt sich also um das Ereignis E_2: „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen ungleichfarbige Kugeln“. Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gilt:

$$P(E_2) = P(sw) + P(ws) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

Alternative:
E_2 ist das Gegenereignis zu E_1. Daher führt die Komplementärregel zum gleichen Ergebnis:

$$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

d) Begründung für die angegebene Wahrscheinlichkeit:
Beim Ziehen aus der Urne gibt es $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, von den 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen. Es gibt dann $\binom{5}{1}$ Möglichkeiten, von den 5 weißen Kugeln 1 Kugel auszuwählen.
Mit E_3 sei das Ereignis bezeichnet, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln genau 2 schwarze Kugeln und 1 weiße befinden. Nach der Produktregel gibt es dann $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ „günstige“ Fälle für das Ereignis E_3.
Insgesamt gibt es $\binom{10}{3}$ Möglichkeiten, aus einer Urne mit 10 Kugeln 3 Kugeln auszuwählen.
Daher stellt der Term $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 dar.

Berechnung der angegebenen Wahrscheinlichkeit:

(1) Mit dem Rechnerbefehl **nCr(n, k)** für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erhält man:

$$P(E_3) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{\mathrm{nCr}(5,2) \cdot \mathrm{nCr}(5,1)}{\mathrm{nCr}(10,3)} \qquad \frac{5}{12}$$

(2) Mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ erhält man für den Zähler:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 50$$

Für den Nenner gilt:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Insgesamt folgt:

$$P(E_3) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

Punkte

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion q mit $q(x) = e^{-x}$. Für die erste Ableitungsfunktion von q gilt: $q'(x) = -q(x)$

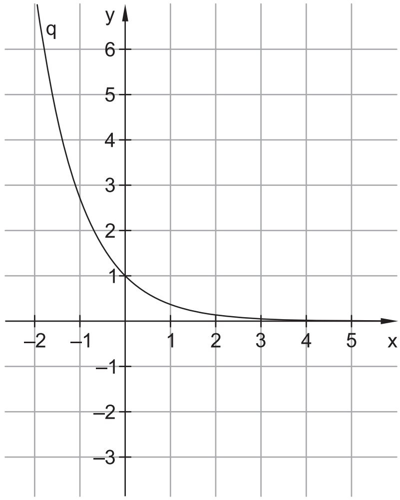


Abbildung 1

a) Skizzieren Sie den Graphen von q' in Abbildung 1.
Beschreiben Sie, wie der Graph von q' aus dem Graphen von q erzeugt werden kann. 4

b) Zeigen Sie, dass t mit $t(x) = -x + 1$ eine Tangente an den Graphen von q an der Stelle 0 ist. 3

c) Geben Sie die geometrische Bedeutung der Gleichung
$$\int_0^b (q(x) - t(x))\, dx = 0{,}1$$ an.
Geben Sie den Wert von b an. 3

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x}$.
GTR-Variante: Weiterhin gilt: $h'(x) = (-x^2 + 3x) \cdot e^{-x}$

d) Berechnen Sie den Abstand der beiden Extrempunkte des Graphen von h. 6

e) Der Graph von h schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Die Gerade g mit $g(x) = k \cdot x - 1$ teilt die Fläche in zwei gleich große Teilflächen. Die Abbildung 2 veranschaulicht die Situation.
Bestimmen Sie den Wert für k. 6

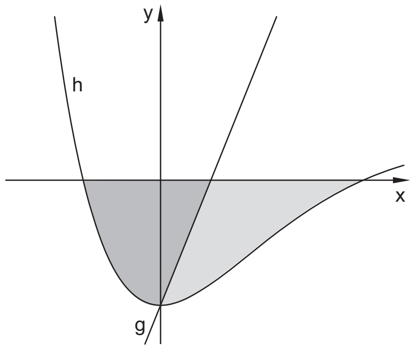


Abbildung 2

Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion w mit
$w(x) = 4 \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x} + 4$
beschreibt für $x \geq 0$ die momentane Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und w(x) die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde $\left(\frac{m^3}{s}\right)$.

Abbildung 3

Abbildung 3 zeigt den Graphen von w.

f) Bestimmen Sie die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt. 5

g) Betrachtet wird der Zeitraum der ersten zehn Sekunden nach Beobachtungsbeginn.
Es gilt:
Für den betrachteten Zeitraum beträgt die mittlere Durchflussrate etwa $4\,\frac{m^3}{s}$.
Beschreiben Sie die graphische Bedeutung der obigen Aussage und veranschaulichen Sie geeignete Flächen in der Abbildung 3. 5

h) Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(1 \mid w(1))$ wird mit ℓ bezeichnet.
Interpretieren Sie die folgende Aussage im Sachzusammenhang:
Für alle Werte von x mit $1 \leq x \leq 1{,}4$ gilt $\frac{\ell(x) - w(x)}{w(x)} < 5\,\%$. 3

35

TIPP Lösungshinweise zum Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 A

Teilaufgabe a

Skizze des Graphen von q' und geometrische Beschreibung

Beachten Sie, welcher geometrischer Zusammenhang durch $q'(x) = -q'(x)$ beschrieben wird.

Teilaufgabe b

Nachweis der Tangentengleichung

Bestimmen Sie die Steigung der Tangente. Nutzen Sie aus, dass $q'(x) = -q(x)$ gilt.

Der Berührpunkt ist an der Stelle 0. Daher entspricht der y-Achsenabschnitt der Tangente der y-Koordinate des Berührpunkts.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Funktionsgleichung der Funktion t aus der Aufgabenstellung.

Teilaufgabe c

Geometrische Bedeutung der angegebenen Gleichung

Deuten Sie das Integral $\int_0^b (q(x) - t(x))\,dx$ als Flächeninhalt und beschreiben Sie die Bedeutung der angegebenen Gleichung.

Lassen Sie sich hierzu von dem Rechner die Graphen der Funktionen q und t grafisch darstellen.

Angabe der Grenze b

Definieren Sie die Funktionen q und t im Rechner und bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $\int_0^b (q(x) - t(x))\,dx = 0{,}1$ mit den Werkzeugen des Rechners.

Teilaufgabe d

Abstand der beiden Extrempunkte

Beachten Sie, dass der Graph von h an den beiden Extremstellen die Steigung null besitzt.

Ermitteln Sie anschließend die y-Koordinaten der beiden Extrempunkte.

Berechnen Sie den Abstand dieser Punkte mit dem Satz des Pythagoras.

Eine geeignete Skizze der beiden Extrempunkte kann hierbei hilfreich sein.

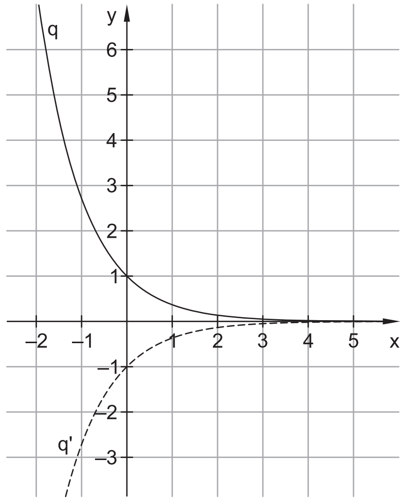
Teilaufgabe e

Bestimmung der Steigung k

Überzeugen Sie sich davon, dass die Graphen von h und g durch den Punkt $(0\,|\,-1)$ verlaufen.

Lösungsvorschlag zum Wahlteil (CAS/GTR) – Aufgabe 1 A

a) Skizze des Graphen von q' und geometrische Beschreibung:
Die Funktionsgraphen der Funktionen q und q' sind achsensymmetrisch zueinander mit der x-Achse als Symmetrieachse. Der Graph von q muss daher lediglich an der x-Achse gespiegelt werden, um den Graphen der Funktion q' zu erhalten.

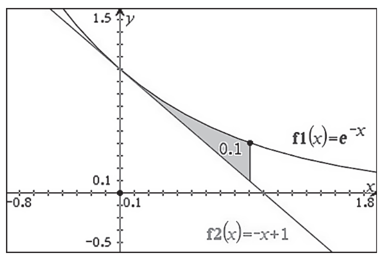


b) Nachweis der Tangentengleichung:
Mit $q'(x) = -q(x)$ folgt für die Tangentensteigung m_t an der Stelle $x = 0$:
$m_t = q'(0) = -q(0) = -1$
Für den y-Achsenabschnitt der Tangente gilt:
$b = q(0) = 1$
Die Gleichung der Tangente im Punkt $(0\,|\,1)$ lautet daher:
$t(x) = -1 \cdot x + 1$

c) Geometrische Bedeutung der angegebenen Gleichung:
Die Graphen der Funktionen q und t schließen mit $x = b$ einen Flächeninhalt ein. Mit dem Integral

$$\int_0^b (q(x) - t(x))\,dx$$

kann die Größe dieses Flächeninhalts berechnet werden.

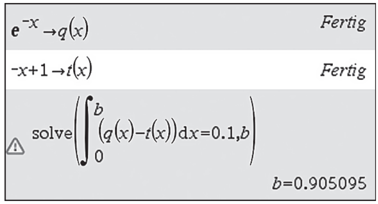


Die Gleichung besagt, dass die beiden Graphen von q und t über dem Intervall [0; b] eine Fläche mit dem Flächeninhalt 0,1 FE einschließen.

Angabe der Grenze b:

Mit dem Ansatz $\int_0^b (q(x)-t(x))\,dx = 0{,}1$ kann die obere Grenze $x = b$ berechnet werden, sodass der eingeschlossene Flächeninhalt 0,1 FE beträgt.

Mit dem Lösebefehl des Rechners erhält man die entsprechende Stelle b. Sie liegt bei $b \approx 0{,}91$.

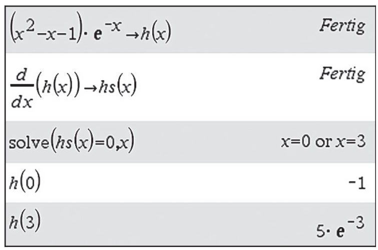


TIPP Der Rechner gibt bei der Verwendung des Lösebefehls ggf. einen Warnhinweis aus, dass weitere Lösungen möglich sind. Im vorliegenden Fall ist das Integral jedoch für $b < 0$ aufgrund der vertauschten Grenzen negativ und für $b > 0{,}905\ldots$ lässt sich anschaulich begründen, dass das Integral in diesem Fall stets größer ist als 0,1.

d) Abstand der beiden Extrempunkte:
Für die beiden Extrempunkte $E_1(x_1 | y_1)$ und $E_2(x_2 | y_2)$ der Funktion h gilt:
$y_1 = h(x_1)$ bzw. $y_2 = h(x_2)$

An den Stellen x_1 und x_2 hat der Graph von h notwendigerweise eine waagerechte Tangente, sodass die erste Ableitung an diesen Stellen null ist:

$h'(x) = 0 \iff x_1 = 0 \vee x_2 = 3$

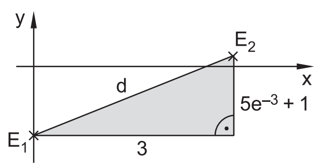


Für die y-Koordinaten der Extrempunkte gilt:
$y_1 = h(0) = -1$
$y_2 = h(3) = 5 \cdot e^{-3}$

Es ergeben sich die folgenden Punkte:
$E_1(0 | -1)$ und $E_2(3 | 5e^{-3})$

Der Abstand der beiden Extrempunkte kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Es gilt:

$d = \sqrt{(3-0)^2 + (5e^{-3}+1)^2} \approx 3{,}25\,[\text{LE}]$



e) Bestimmung der Steigung k:
Wegen $g(0) = -1$ verläuft auch die Gerade g durch $E_1(0 | -1)$. Dies ist der Schnittpunkt vom Graph h und der Geraden g.