2025
2026

Abitur

Original-Prüfu…
mit Lösungen

MEHR
ERFAHREN

Gymnasium · Gesamts…

Mathematik …

+ *Übungsaufgaben*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz…*

PDF

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2022

Abiturprüfung 2023

Abiturprüfung 2024

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MySTARK** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil A
- **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2024** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind
- **Übungsaufgaben** für das Abitur 2026

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2025 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Autorinnen und Autoren:

Georg Breitenfeld
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A; Prüfungsteil B: B4;
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil B: B2 (CAS), B4 (GTR);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022 – Prüfungsteil B: B2 (CAS), B4 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2023 – Prüfungsteil B: B2 (CAS), B4 (GTR / CAS);
Download: 2017 – A Teilaufgabe d, B5 (GTR), B5 (CAS); 2018 –A Teilaufgaben b und d, B5 (GTR / CAS);
2019 –A Teilaufgaben b und d, B5 (GTR / CAS); 2020 – B2 (GTR), B2 (CAS), B5 (GTR / CAS);
2021 – B2 (GTR), B4 (CAS); 2022 – B2 (GTR); 2023 – B2 (GTR)

Herbert Kompernaß
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A; Prüfungsteil B: B1, B2, B3;
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil B: ;
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil B: B1 (GTR), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022 – Prüfungsteil B: B1 (CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2023 – Prüfungsteil B: B1 (CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2024,
Download: 2017 – A Teilaufgaben a, b und c, B1 (GTR), B1 (CAS), B2 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR / CAS);
2018 – A Teilaufgaben a und c, B1 (GTR), B1 (CAS), B2 (GTR / CAS), B3 (GTR / CAS);
2019 – A Teilaufgaben a und c, B1 (GTR), B1 (CAS), B2 (CAS), B2 (GTR), B3 (GTR / CAS);
2020 – B1 (GTR), B1 (CAS), B3 (GTR / CAS); 2021 – B1 (CAS); 2022 – B1 (GTR); 2023 – B1 (GTR)

Kristin Menke
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A;
Lösungen zur Abiturprüfung 2021 – Prüfungsteil A: A3, Prüfungsteil B: B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2022 – Prüfungsteil A: A3, Prüfungsteil B: B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2023 – Prüfungsteil A: A3, Prüfungsteil B: B5 (CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2024,
Download: 2020 – A; 2021 – A1, A2; 2022 – A1, A2; 2023 – A1, A2, B5 (GTR)

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Leistungskurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2025 bzw. 2026** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2025 bzw. 2026 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der schriftlichen Abiturprüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2021 bis 2024**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MySTARK**:
  
  – **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
  – **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  – **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil A
  – **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht
  – **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2024**, die nicht im Buch abgedruckt sind
  – **Übungsaufgaben** für das Abitur 2026

  Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2025 bzw. 2026 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MySTARK.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr STARK Verlag

Hinweise und Tipps zum Abitur 2025 bzw. 2026

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik besteht aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, der Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln** enthält.
Seit dem Abitur 2021 haben sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung geändert. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen (auf MySTARK zu finden) sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Leistungskurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Er besteht aus einem Pflicht- und einem Wahlpflichtteil.
  Der **Pflichtteil** enthält vier Aufgaben: zwei Aufgaben aus der Analysis und je eine Aufgabe aus der Vektoriellen Geometrie und der Stochastik. Alle **vier Aufgaben müssen bearbeitet** werden.
  Der **Wahlpflichtteil** enthält sechs Aufgaben: zwei aus der Analysis, zwei aus der Vektoriellen Geometrie und zwei aus der Stochastik. Die Schülerinnen und Schüler wählen ohne Einschränkungen aus diesen sechs Aufgaben **zwei Aufgaben** aus, die sie lösen.
  Insgesamt werden also im Prüfungsteil A **sechs Aufgaben** bearbeitet.
  Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.

– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze:
  - **Abitur 2025**: einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz
  - **Abitur 2026**: einen WTR-Aufgabensatz und einen CAS/MMS-Aufgabensatz

  Jeder Aufgabensatz beinhaltet zwei Analysisaufgaben, eine Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und eine Stochastikaufgabe.
  Die **Fachlehrkraft** wählt eine der beiden Analysisaufgaben aus. Die Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und die Aufgabe zur Stochastik sind verbindlich festgelegt. Insgesamt gibt es also eine **Analysisaufgabe**, eine Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und eine Aufgabe zur **Stochastik**.

  Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B im **Abitur 2025**:
  - GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
  - Mathematische Formelsammlung
  - Deutsches Wörterbuch

  Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B im **Abitur 2026**:
  - WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner) **oder** CAS/MMS (Computer-Algebra-System / modulares Mathematiksystem)
  - Mathematische Formelsammlung
  - Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen den Schülerinnen und Schülern im Leistungskurs insgesamt **300 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit einschließlich Auswahlzeit für den Prüfungsteil A, der zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 100 Minuten. Sobald die Schülerinnen und Schüler mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können sie ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.
Sollte der Prüfungsteil A schneller bearbeitet werden können, darf auch schon früher mit dem Prüfungsteil B begonnen werden. Dann steht für diesen entsprechend mehr Zeit zur Verfügung.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Leistungskurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2025** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	**Beispiele**
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2022 – Aufgabe B2 (CAS)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern	2021 – Aufgabe B1 (GTR)
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2022 – Aufgabe A3, Teilaufgabe b (1)
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2022 – Aufgabe A, Teilaufgabe d
• Integralrechnung	2022 – Aufgabe A, Teilaufgabe c (2)
Analytische Geometrie und Lineare Algebra	
• lineare Gleichungssysteme	2023 – Aufgabe A3, Teilaufgabe e
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte	2022 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Lagebeziehungen und Abstände	2022 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Skalarprodukt	2022 – Aufgabe A3, Teilaufgabe e
Stochastik	
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	2021 – Aufgabe A3, Teilaufgabe f
• Binomialverteilung und Normalverteilung	2022 – Aufgabe B4 (GTR/CAS)
• Testen von Hypothesen	2022 – Aufgabe B4 (GTR/CAS)

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung
Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

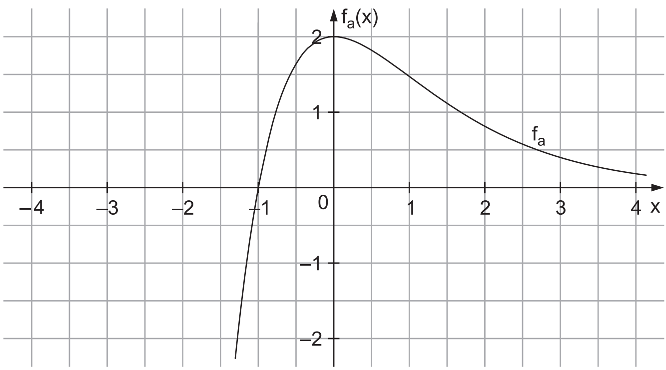
Pflichtteil

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen
$f(x) = 3x^2 - 12x + 9,\ x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = -3x + 9,\ x \in \mathbb{R}$.

(1) Ermitteln Sie, an welcher Stelle x die Graphen der Funktionen f und g die gleiche Steigung besitzen.

(2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g begrenzt wird.

b) Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung
$f_a(x) = (ax + 2) \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ und dem Parameter $a \neq 0$. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion dieser Schar.



(1) Bestimmen Sie den zum abgebildeten Graphen der Funktion f_a zugehörigen Parameter a.

(2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass alle Graphen der Funktionenschar f_a an der Stelle $x_0 = \frac{a-2}{a}$ eine waagrechte Tangente besitzen.

c) Gegeben sind die Punkte $A(-6\,|\,8\,|\,7)$ und $B(-2\,|\,10\,|\,3)$ sowie die Ebene
$E\colon 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

(1) Zeigen Sie, dass der Punkt A in der Ebene E liegt und der Vektor $\overrightarrow{AB}$ senkrecht zur Ebene E steht.

(2) Der Punkt B wird an der Ebene E gespiegelt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes.

Wahlpflichtteil

e) Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = (x - k) \cdot e^x$, $k \in \mathbb{R}$.
Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f_k''(x) = (x - k + 2) \cdot e^x$

(1) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionenschar f_k den Tiefpunkt $T_k(k-1 \mid -e^{k-1})$ haben.

(2) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Ortslinie, auf der alle Tiefpunkte T_k der Funktionenschar f_k liegen.

f) Gegeben ist die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 2e^{-x}$, $x \geq 0$.

(1) Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion g. Geben Sie begründet an, welche Abbildung dies ist.

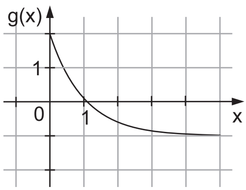


Abbildung 1

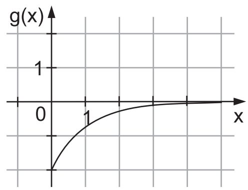


Abbildung 2

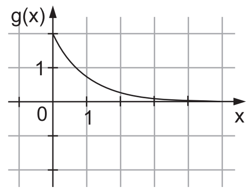


Abbildung 3

(2) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die unbegrenzte Fläche, die der Graph der Funktion g mit den Koordinatenachsen einschließt, einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

g) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene E: $x_1 + 2x_2 - x_3 + 4 = 0$ sowie die Punkte $A(3 \mid 1 \mid 3)$ und $B_a(a \mid a \mid 2a)$, $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

(1) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen.

(2) Die Gerade g_a verläuft durch die Punkte A und B_a.
Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Gerade g_a parallel zur Ebene E verläuft, und geben Sie die zugehörige Geradengleichung an.

h) Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid 0 \mid 6)$, $C(4 \mid 6 \mid 8)$ und $D(1 \mid 6 \mid 2)$.

(1) Zeigen Sie, dass es sich bei dem Viereck ABCD um ein Parallelogramm handelt.

(2) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass der Punkt $F(1 \mid 1 \mid 2)$ innerhalb des Parallelogramms ABCD liegt.

Hinweise und Tipps

Pflichtteil

Teilaufgabe a

(1) Geben Sie die Steigung des Graphen der Funktion f mithilfe der 1. Ableitung an.

Beachten Sie, dass der Graph der Funktion g eine Gerade ist. Überlegen Sie sich, welche Steigung die Gerade besitzt.

Gesucht ist die Stelle x, an der der Funktionsterm der 1. Ableitung von f mit der Steigung der Geraden übereinstimmt.

(2) Bestimmen Sie die Schnittstellen der Graphen der beiden Funktionen.

Stellen Sie einen Term für die Differenzfunktion von f und g auf.

Integrieren Sie über die Differenzfunktion. Die Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen.

Achten Sie darauf, dass eine Fläche keinen negativen Flächeninhalt besitzen kann.

Teilaufgabe b

(1) Lesen Sie die Koordinaten eines Punktes des Graphen aus der Abbildung ab.

Bestimmen Sie durch Einsetzen der Koordinaten dieses Punktes in die Funktionsgleichung den Parameter a.

Beachten Sie, dass nicht alle Punkte des Graphen hierfür geeignet sind.

Oder

Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Nullstelle von f_a.

Vergleichen Sie die berechnete Nullstelle mit dem abgebildeten Graphen.

(2) Überlegen Sie, welche Steigung eine waagrechte Tangente besitzt.

Bestimmen Sie die Ableitung von f_a mithilfe der Ketten- und Produktregel.

Berechnen Sie die Stelle, an der die Steigung gleich null ist, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem vorgegebenen Wert.

Oder

Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitungsfunktion von f_a an der vorgegebenen Stelle.

Teilaufgabe c

(1) Setzen Sie die Koordinaten von A in die Koordinatenform der Ebene E ein und prüfen Sie, ob eine wahre Aussage entsteht.

Ein Vektor steht senkrecht auf einer Ebene, wenn der Vektor und der Normalenvektor der Ebene kollinear sind.

Zwei Vektoren sind kollinear, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

Lösung

Pflichtteil

a) (1) Die 1. Ableitung von f gibt die Steigung des Graphen der Funktion f an.

$f'(x) = 6x - 12$

Der Graph der Funktion g ist eine Gerade mit der Steigung $m = -3$.

Durch Gleichsetzen des Funktionsterms der 1. Ableitung von f mit der Steigung der Geraden g ergibt sich:

$$\begin{aligned} 6x - 12 &= -3 \quad &&|+12 \\ 6x &= 9 \quad &&|:6 \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 1{,}5$ besitzen die Graphen von f und g die gleiche Steigung.

(2) Zur Berechnung des Inhalts der von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossenen Fläche werden die Schnittstellen von f und g bestimmt. Diese ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsterme.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 9 &= -3x + 9 \quad &&|+3x - 9 \\ 3x^2 - 9x &= 0 \\ 3x \cdot (x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor null ist.

$x_1 = 0$ oder $x_2 = 3$

Zur Berechnung des Flächeninhalts wird über die Differenzfunktion integriert. Diese lautet:

$d(x) = f(x) - g(x) = 3x^2 - 12x + 9 - (-3x + 9) = 3x^2 - 9x$

Da Flächen immer positiv sind, wird der Betrag benötigt.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^3 d(x)\,dx \right| \\ &= \left| \int_0^3 (3x^2 - 9x)\,dx \right| \\ &= \left| \left[x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 \right| \\ &= \left| 27 - \frac{81}{2} - 0 \right| \\ &= |\,27 - 40{,}5\,| \\ &= |\,-13{,}5\,| \\ &= 13{,}5\,[\text{FE}] \end{aligned}$$

Statt den Betrag zu verwenden, kann auch mithilfe geeigneter Funktionswerte, z. B. $f(1)$ und $g(1)$, festgestellt werden, dass der Graph der Funktion g zwischen den Integrationsgrenzen oberhalb des Graphen von f verläuft. Wird als Differenzfunktion nicht $f(x)-g(x)$, sondern $g(x)-f(x)$ gewählt, ergibt sich bei der Integration auch ohne Berücksichtigung des Betrags ein positiver Wert.

b) (1) Da unabhängig vom Parameter a die Graphen aller Funktionen der Schar durch den Punkt $S(0\,|\,2)$ verlaufen, führt das Einsetzen der Koordinaten dieses Punktes zwar zu einer wahren Aussage, der gesuchte Parameter a kann dadurch aber nicht bestimmt werden:

$2=(a\cdot 0+2)\cdot e^{-0}$
$2=2$

Zur Bestimmung von a muss ein anderer Punkt des Graphen herangezogen werden.

Der Punkt $N(-1\,|\,0)$ ist ein Punkt des Graphen und erfüllt somit die Funktionsgleichung. Durch Einsetzen der Koordinaten dieses Punktes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= f(-1) \\
0 &= (a\cdot(-1)+2)\cdot e^{-(-1)} \\
0 &= (-a+2)\cdot e^{1} && \big|:e^{1} \\
0 &= -a+2 && \big|+a \\
a &= 2
\end{aligned}$$

Alternativ durch Berechnung der Nullstelle der Funktion f_a:

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= 0 \\
(ax+2)\cdot e^{-x} &= 0 && \big|:e^{-x}\neq 0 \\
ax+2 &= 0 && \big|-2 \\
ax &= -2 && \big|:a\neq 0 \\
x &= -\frac{2}{a}
\end{aligned}$$

Der in der Abbildung dargestellte Graph schneidet die x-Achse bei $x=-1$. Gleichsetzen führt zu:

$$\begin{aligned}
-1 &= -\frac{2}{a} && \big|\cdot(-a) \\
a &= 2
\end{aligned}$$

Der zum abgebildeten Graphen zugehörige Parameter lautet $a=2$.

(2) Eine waagrechte Tangente hat die Steigung null.

Die 1. Ableitung von f_a wird mithilfe der Ketten- und Produktregel bestimmt:

$f_a'(x)=a\cdot e^{-x}+(ax+2)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}\cdot(-ax+a-2)$

Wahlpflichtteil

e) (1) Eine Ableitung mithilfe der Produktregel ergibt:

$f_k'(x) = e^x + (x-k) \cdot e^x = (x-k+1) \cdot e^x$

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: $f_k'(x) = 0$

$(x-k+1) \cdot e^x = 0$

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor null ist.

Wegen $e^x \neq 0$ muss gelten:

$x-k+1 = 0 \quad | +k-1$

$x = k-1$

Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle: $f_k'(x) = 0 \ \wedge \ f_k''(x) \neq 0$

$f_k''(k-1) = (k-1-k+2) \cdot e^{k-1} = e^{k-1} > 0 \ \Rightarrow$ Minimum

Für die y-Koordinate gilt:

$f_k(k-1) = (k-1-k) \cdot e^{k-1} = -e^{k-1}$

Alle Graphen der Funktionenschar f_k haben den Tiefpunkt $T_k(k-1 \mid -e^{k-1})$.

(2) Für alle Tiefpunkte T_k gilt:

$x = k-1$ und $y = -e^{k-1}$

Einsetzen von $k-1 = x$ in y liefert:

$y = -e^x$

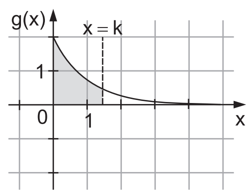
f) (1) Die e-Funktion nimmt nur positive Werte an. Es gilt:

$g(x) = 2e^{-x} > 0$

Der Funktionsgraph von g verläuft nur oberhalb der x-Achse. Daher zeigt Abbildung 3 den Graphen der Funktion g.

(2) Um den Flächeninhalt zu ermitteln, muss eine Stammfunktion G von g bestimmt werden:

$G(x) = -2 \cdot e^{-x}$



Der Graph der Funktion g verläuft oberhalb der x-Achse. Der Flächeninhalt, den der Graph der Funktion g mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = k$, $k > 0$ einschließt, lässt sich durch folgendes bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^k g(x)\,dx = \int_0^k 2e^{-x}\,dx = [-2e^{-x}]_0^k = -2e^{-k} - (-2 \cdot e^{-0}) = -2e^{-k} + 2$$

Abiturprüfung 2023 Mathematik Leistungskurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil B – Analysis B1 (CAS)

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = (x^3 - 5) \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist in Abbildung 1 dargestellt.

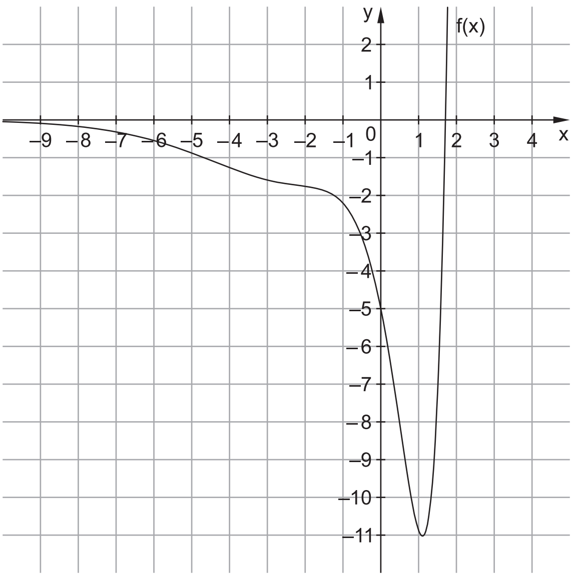


Abbildung 1

Punkte

a) (1) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(-1 \mid f(-1))$, ohne dabei an Funktionsgraphen abgelesene Werte oder Zusammenhänge zu verwenden. 3

Der Graph von f besitzt genau eine Extremstelle und drei Wendestellen.

(2) Berechnen Sie die Wendestellen der Funktion f auf drei Nachkommastellen gerundet. 3

Für $z > 0$ ist $P_z(z \mid f(z))$ ein Punkt auf dem Graphen von f. Er bildet zusammen mit dem Koordinatenursprung $O(0 \mid 0)$ und dem Punkt $Q_z(z \mid 0)$ ein Dreieck OP_zQ_z.

(3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OP_zQ_z, wenn für P_z der Tiefpunkt des Graphen von f gewählt wird. 3

b) (1) Zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse liegt im 3. und 4. Quadranten eine Fläche mit endlichem Flächeninhalt, die nach links unendlich ausgedehnt ist.
Diese Fläche ist in Abbildung 2 grau dargestellt.

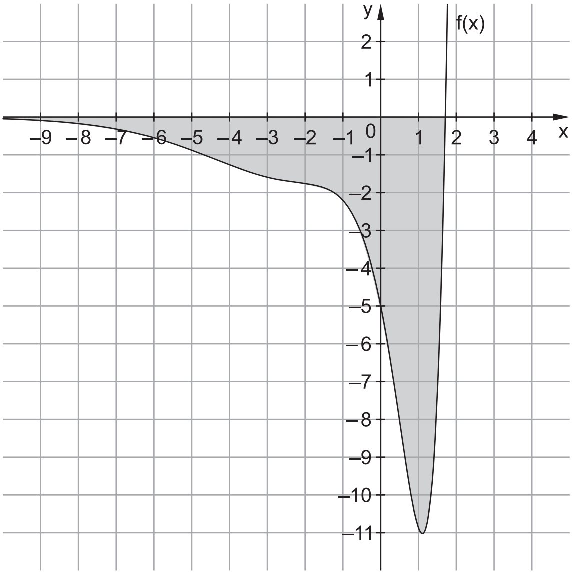


Abbildung 2

(i) Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche gerundet auf drei Nachkommastellen.

(ii) Die y-Achse teilt diese Fläche in zwei Teilflächen.
Ermitteln Sie das Verhältnis der zugehörigen Flächeninhalte. 6

(2) Für $z \neq 0$ hat die Gleichung $\int_0^z f(x)\,dx = 0$ genau eine Lösung.

Bestimmen Sie diese Lösung und interpretieren Sie die Lösung geometrisch. 5

(3) Die Punkte $O(0|0)$, $N(-5|0)$, $Y(0|-5)$ bilden ein Dreieck ONY. Der Graph der Funktion f verläuft teilweise innerhalb des Dreiecks und schließt mit der Seite $\overline{NY}$ eine Fläche A ein.

(i) Zeichnen Sie die Fläche A in Abbildung 3 ein.
[Hinweis: Abbildung 3 ist identisch mit Abbildung 1.]

(ii) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche A.

(iii) Ermitteln Sie die beiden Punkte auf dem Graphen von f, in denen die Tangente parallel zur Seite $\overline{NY}$ verläuft.

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Die Steigung m der Tangente im Punkt $P(p \mid f(p))$ des Graphen der Funktion f ist gleich der Steigung des Graphen in diesem Punkt.

Die Steigung entspricht dem Wert der 1. Ableitung an der Stelle $x = p$.

Berechnen Sie die 1 Ableitungsfunktion mit der Kettenregel oder mithilfe eines CAS.

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, indem Sie die Koordinaten des Punktes P sowie die Steigung in die allgemeine Form der Geradengleichung $y = m \cdot x + n$ einsetzen.

Lösen Sie die Gleichung nach n auf.

(2) Bestimmen Sie die 2. Ableitungsfunktion mit der Kettenregel oder mithilfe eines CAS.

Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist $f''(x) = 0$.

Beachten Sie, dass in der Aufgabenstellung die Anzahl der Wendestellen gegeben ist. Daher ist die Untersuchung der hinreichenden Bedingung nicht verlangt.

(3) Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes mithilfe eines CAS.

Es bietet sich eine grafische Bestimmung an. So können Sie sich auch gleich das Dreieck veranschaulichen.

Beachten Sie, dass das Dreieck OP_zQ_z rechtwinklig ist.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b berechnet sich nach der Formel $A = \frac{a \cdot b}{2}$.

Teilaufgabe b

(1) (i) Der Inhalt der Fläche wird mithilfe eines Integrals berechnet.

Beachten Sie, dass der Graph der Funktion unterhalb der x-Achse liegt.

Die Integrationsgrenzen sind $-\infty$ und die Nullstelle der Funktion f.

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor den Wert null annimmt.

(ii) Die Fläche wird unterteilt durch die Gerade mit der Gleichung $x = 0$.

Berechnen Sie mithilfe der Integrationsgrenze $x = 0$ die Flächeninhalte im 3. bzw. im 4. Quadranten.

Setzen Sie die Flächeninhalte ins Verhältnis.

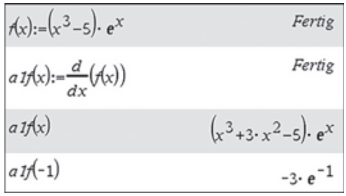
(2) Lösen Sie die Integralgleichung mithilfe eines CAS.

Beachten Sie, dass der Wert des Integrals zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse negativ ist, falls der Graph unterhalb der x-Achse verläuft.

Lösung

a) (1) Die Steigung m der Tangente im Punkt $P(p\,|\,f(p))$ des Graphen der Funktion f ist gleich der Steigung des Graphen in diesem Punkt. Diese entspricht dem Wert der 1. Ableitung an der Stelle $x = p$.

Eine Berechnung der 1. Ableitungsfunktion ergibt:

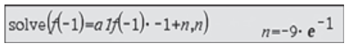


$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + (x^3 - 5) \cdot e^x$$
$$= (x^3 + 3x^2 - 5) \cdot e^x$$

Für die Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x = -1$ gilt:

$$m = f'(-1) = (-1 + 3 - 5) \cdot e^{-1} = -3e^{-1}$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P(-1\,|\,f(-1))$ sowie der Steigung in die allgemeine Form der Geradengleichung $y = m \cdot x + n$ und Lösen der Gleichung nach n liefert den y-Achsenabschnitt der Tangente:

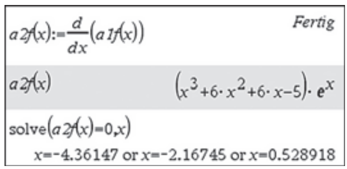


$$f(-1) = f'(-1) \cdot (-1) + n$$
$$-6e^{-1} = -3e^{-1} \cdot (-1) + n$$
$$n = -9e^{-1}$$

Die Tangente hat die folgende Gleichung:

$$y = -3e^{-1} \cdot x - 9e^{-1}$$

(2) Eine Berechnung der 2. Ableitungsfunktion ergibt:



$$f''(x) = (3x^2 + 6x) \cdot e^x + (x^3 + 3x^2 - 5) \cdot e^x$$
$$= (x^3 + 6x^2 + 6x - 5) \cdot e^x$$

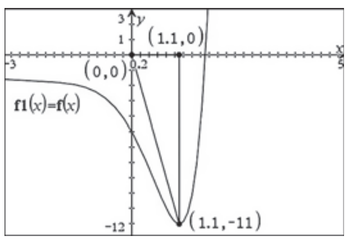
Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist $f''(x) = 0$.

$$(x^3 + 6x^2 + 6x - 5) \cdot e^x = 0$$
$$x_{W1} \approx -4{,}361 \lor x_{W2} \approx -2{,}167 \lor x_{W3} \approx 0{,}529$$

Auf die Untersuchung der hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden. Nach Aufgabenstellung besitzt der Graph der Funktion genau 3 Wendestellen. Die berechneten 3 möglichen Wendestellen müssen somit die hinreichende Bedingung erfüllen.

(3) Eine grafische Bestimmung ergibt als ungefähre Koordinaten des Tiefpunktes $T(1{,}1\,|\,-11)$.

Das Dreieck OP_zQ_z mit $z = 1{,}1$ ist rechtwinklig mit den Katheten $\overline{OQ_z}$ und $\overline{P_zQ_z}$. Die Kathetenlängen entsprechen der Abszisse von Q_z und der negativen Ordinate von P_z.



Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b berechnet sich nach folgender Formel:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Damit gilt:

$$A = \frac{1{,}1 \cdot 11}{2} = 6{,}05\,[\text{FE}]$$

b) (1) (i) Zunächst wird die Nullstelle der Funktion f berechnet.

$$f(x) = (x^3 - 5) \cdot e^x = 0$$

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor den Wert null annimmt. Wegen $e^x \neq 0$ gilt:

$$x^3 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{5}$$

Der Graph der Funktion liegt im betrachteten Bereich unterhalb der x-Achse. Der links bis ins Unendliche reichende Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse ist daher gleich dem negativen Wert des Integrals.

$$-\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{5}} f(x)\,dx \approx 24{,}947\,[\text{FE}]$$

(ii) Die Fläche wird unterteilt durch die Gerade mit der Gleichung $x = 0$ (y-Achse).
Für die Fläche im 3. Quadranten gilt:

$$-\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 11$$

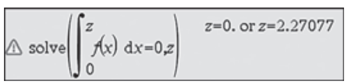
Damit gilt:
$11 : (24{,}947 - 11) = 11 : 13{,}947 \approx 1 : 1{,}268$

Die Flächeninhalte teilen sich im Verhältnis 1 : 1,268.

Alternativ:
$(24{,}947 - 11) : 11 = 13{,}947 : 11 \approx 1 : 0{,}789$

Die Flächeninhalte teilen sich im Verhältnis 1 : 0,789.

(2) Mithilfe des CAS erhält man als Lösung der Integralgleichung $z \approx 2{,}271$.



Der Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen im 4. Quadranten einschließen, ist genauso groß wie der Flächeninhalt, die der Graph der Funktion, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $z \approx 2{,}271$ einschließen.