2025

Zentrale P...

Original-Prüfu...
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium · Gesamts...

Mathematik 1...

+ *Übungsaufgaben*
+ *Hinweise zum Ablauf der Prüf...*

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Original-Prüfungsaufgaben

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MySTARK** findest du:

– **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
– **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil I
– **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht

Den Zugangscode zu MySTARK findest du auf der Umschlaginnenseite.

Autor der Übungsaufgaben, Tipps und Lösungen:
Udo Mühlenfeld

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch erhältst du eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die ZP10 an Gymnasien mit G9.

- Im ersten Teil des Buches findest du viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Zentrale Prüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2025 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Du findest darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die dir sowohl bei der Vorbereitung auf die ZP10 als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der Zentralen Prüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Prüfungsaufgaben 2019 und 2021 bis 2024**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unserem Autor **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die dir das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhältst du zusätzliches Übungsmaterial **online bei MySTARK**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
  - **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil I
  - **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht

  Den Zugangscode zu MySTARK findest du auf der Umschlaginnenseite.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Zentralen Prüfung 2025 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, findest du aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MySTARK.

Der STARK Verlag und ich wünschen dir viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei deiner Prüfung!

Udo Mühlenfeld

Hinweise und Tipps zur Zentralen Prüfung

1 Ablauf der Prüfung

1.1 Die Zentrale Prüfung

In Nordrhein-Westfalen wird an Gymnasien mit G9 der Mittlere Schulabschluss (MSA) am Ende der Klasse 10 erworben. Dafür legen die Schülerinnen und Schüler schriftliche Prüfungen in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik ab.
Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Prüfung sind die Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans in der aktuell gültigen Fassung.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die zentrale Prüfung in Mathematik besteht aus zwei Prüfungsteilen:

- Prüfungsteil A besteht aus einzelnen, nicht aufeinander aufbauenden Teilaufgaben, mit denen grundlegende Kompetenzen aus den folgenden Inhaltsbereichen überprüft werden:
  - Arithmetik/Algebra
  - Funktionen
  - Geometrie
  - Stochastik

  Damit durch die Aufgaben auch Grundideen und Grundvorstellungen erfasst werden, können diese auch Teile enthalten, bei denen Argumentationen und Darstellungswechsel im Vordergrund stehen.
  Außer Zirkel und Geodreieck (sowie Papier und Stift) sind keine Hilfsmittel zugelassen.

- Im Prüfungsteil B werden drei komplexere Aufgaben gestellt, die innerhalb eines Kontextes mehrere Teilaufgaben beinhalten. Hier werden die oben genannten Inhaltsbereiche (Gegenstände) mit den folgenden Kompetenzbereichen (Prozessen) verknüpft:
  - Operieren
  - Modellieren
  - Problemlösen
  - Argumentieren
  - Kommunizieren

  Zur Bearbeitung der Aufgaben können auch Kompetenzen erforderlich sein, die die Schülerinnen und Schüler in früheren Jahrgangsstufen erworben haben. Zugelassene Hilfsmittel sind Zirkel, Geodreieck, Formelsammlung und Taschenrechner (mit oder ohne Grafikfähigkeit).

Bis 2022 waren im Prüfungsteil I (entspricht Prüfungsteil A) Hilfsmittel zugelassen. Dennoch eignen sich die meisten Aufgaben aus den Prüfungen bis 2022 zum Üben, um sich über die verwendeten Aufgabenformate sowie die Höhe und den Umfang der Anforderungen zu informieren.
In den Jahren 2021 und 2022 gab es coronabedingt im Prüfungsteil I (entspricht Prüfungsteil A) zwei Wahlmöglichkeiten. Hier konnten die Lehrerinnen und Lehrer wählen, welche Aufgaben ihre Schülerinnen und Schüler bearbeiten sollen.

1.3 Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen den Schülerinnen und Schülern insgesamt 130 Minuten zur Verfügung. Dabei entfallen 30 Minuten auf Prüfungsteil A und 90 Minuten auf den Prüfungsteil B. Zusätzlich gibt es eine Bonuszeit von 10 Minuten auf den Prüfungsteil A **oder** den Prüfungsteil B.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2025

2.1 Prüfungsteil A (Mathematik ohne Hilfsmittel)

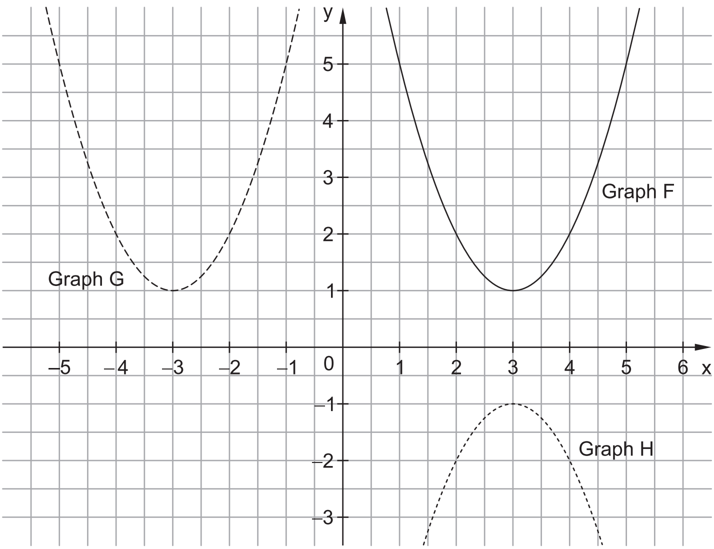
Für die anfangs genannten Inhaltsbereiche werden mögliche Schwerpunkte genannt:

- Arithmetik/Algebra
  - Umgang mit Größen und Maßeinheiten
  - grundlegende algebraische Operationen
  - Bruch-, Prozent-, Dezimal-, Wurzel- und Potenzschreibweise anwenden
  - Lösungsverfahren und Algorithmen nutzen
- Funktionen
  - erweiterte Grundvorstellungen, Darstellungswechsel (Text, Term, Tabelle, Graph)
  - Einfluss von Parametern
  - lineare, quadratische und exponentielle Funktionen

Prüfungsteil I

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt den Graphen F einer quadratischen Funktion f sowie die Graphen G und H, die dadurch entstehen, dass der Graph F an der y- bzw. x-Achse gespiegelt wird.



a) Kreuze die zur Funktion f gehörigen Gleichungen an (mehrere Lösungen möglich):

☐ $f(x) = x^2 - 6x + 10$

☐ $f(x) = (x+1)^2 + 3$

☐ $f(x) = (x-3)^2 + 1$

☐ $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$

b) Gib die zu den Funktionen g bzw. h gehörigen Gleichungen an.

c) Begründe, warum der Punkt $P(0\,|\,10)$ sowohl auf dem Graphen F als auch auf dem Graphen G liegt.

Aufgabe 2

a) Gib die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen an:

(1) $(x-3)(x+5)=0$

(2) $(x-4)^2=0$

(3) $x^2+6=0$

(4) $x^2+8x+16=0$

b) Gib zu den folgenden Lösungen jeweils eine passende quadratische Gleichung an:

(1) $x=7 \lor x=-3$

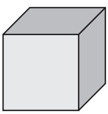
(2) $x=\sqrt{8} \lor x=-\sqrt{8}$

(3) $x=5$

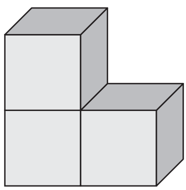
Aufgabe 3

Frauke baut aus Würfeln, deren Volumen 1 cm^3 beträgt, stufenförmige Bauwerke.

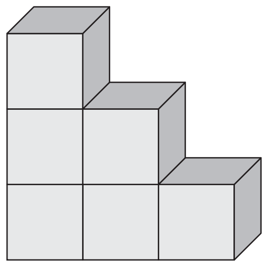
Bauwerk 1



Bauwerk 2



Bauwerk 3



Ergänze die folgende Tabelle:

Bauwerk Nr. n	1	2	3	4
Volumen in cm^3				
Gesamte Oberfläche in cm^2				
Anzahl der benötigten Würfel für die ersten n Bauwerke				

TIPP Lösungshinweise zum Prüfungsteil I

Teilaufgabe 1 a

Überprüfe, ob es sich bei dem Graphen F um eine verschobene Normalparabel handelt.

Stelle dann die Funktionsgleichung auf und überprüfe, zu welchen gegebenen Gleichungen diese äquivalent ist.

Umgekehrt kannst du überlegen, wie die Graphen der vier gegebenen Funktionen aussehen, und diese mit dem Graphen F vergleichen.

Teilaufgabe 1 b

Überlege, durch welche geometrischen Abbildungen die Graphen G und H aus dem Graphen F hervorgehen.

Untersuche die Auswirkungen dieser Abbildungen auf die Punkte des Graphen, insbesondere auf den Scheitelpunkt.

Teilaufgabe 1 c

Dieser Nachweis kann rechnerisch erfolgen.

Ein Teil der Rechnung kann durch Symmetrieüberlegungen oder Eigenschaften der Normalparabel ersetzt werden.

Teilaufgabe 2 a

Vorteilhaft ist stets die Produktdarstellung: Ein Produkt ist gleich null, wenn einer der beiden Faktoren gleich null ist.

Du kannst dazu auch die binomischen Formeln verwenden.

Teilaufgabe 2 b

Nutze wieder die Produktdarstellung für die quadratischen Gleichungen.

Es gibt keine eindeutige Lösung, da du stets die Gleichung mit einer reellen Zahl ungleich Null multiplizieren kannst. Beschränke dich auf die einfachste Lösung.

Aufgabe 3

Überlege zunächst, wie du vorgehst, um das nächste Bauwerk zu bauen.

„Gesamte Oberfläche“ bedeutet, dass nicht nur die in der Abbildung sichtbare Oberfläche betrachtet werden soll.

Achte genau auf den Text. Es ist nach der Summe der Würfel gefragt.

Teilaufgabe 4 a

Dem Text kannst du die Farben und die jeweilige Anzahl der Kugeln zu Beginn entnehmen.

Prüfe, ob es sich um ein Ziehen mit oder ohne Zurücklegen handelt.

Lösungsvorschlag zum Prüfungsteil I

Aufgabe 1

a) ☒ $f(x) = x^2 - 6x + 10$

☐ $f(x) = (x+1)^2 + 3$

☒ $f(x) = (x-3)^2 + 1$

☐ $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$

TIPP Wird der x-Wert vom Scheitelpunkt aus gesehen um 1 erhöht oder erniedrigt, nimmt der y-Wert um 1 zu. Die Parabel hat also die Form einer Normalparabel. Sie wird um drei Einheiten nach rechts und eine Einheit nach oben verschoben. Somit gilt:

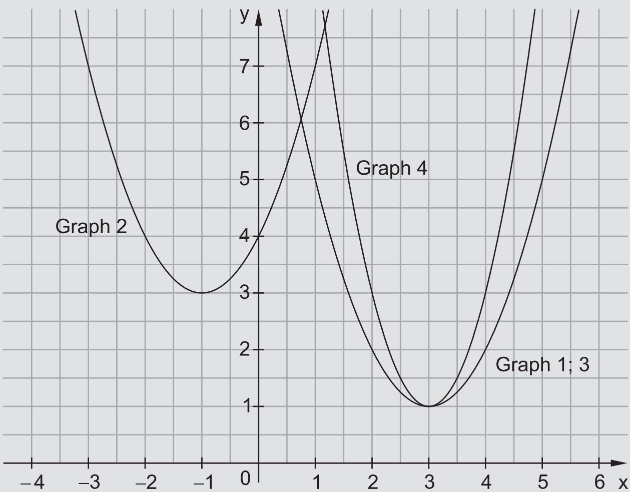
$f(x) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$

Umgekehrte Überlegung:
Für die erste Funktion gilt:
$f(2) = 2$; $f(3) = 1$; $f(4) = 2$

Für die zweite Funktion gilt:
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $(-1\,|\,3)$.

Für die dritte Funktion gilt:
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $(3\,|\,1)$.

Für die vierte Funktion gilt:
Wegen des Faktors 2 ist die Parabel enger als eine Normalparabel.



b) $g(x) = (x+3)^2 + 1$
$h(x) = -(x-3)^2 - 1$

> **TIPP** G entsteht aus F durch Spiegelung an der y-Achse. Beim Scheitelpunkt ändert sich nur das Vorzeichen des x-Wertes.
> H entsteht aus F durch Spiegelung an der x-Achse. Bei allen Punkten ändert sich das Vorzeichen des y-Wertes, es gilt also $h(x) = -f(x)$.

c) $f(x) = (x-3)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 10$
$g(x) = (x+3)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 10$

Alternative Lösung:
Es gilt $f(0) = 10$. G entsteht aus F durch Spiegelung an der y-Achse. Der Punkt $(0|10)$ liegt auf der Symmetrieachse und gehört somit auch zu G.

Alternative Lösung:
G und F sind verschobene Normalparabeln. Wird der x-Wert des Scheitelpunktes von F um 3 erniedrigt bzw. der x-Wert des Scheitelpunktes von G um 3 erhöht, steigt der y-Wert jeweils um $3^2 = 9$ von 1 auf 10.

Aufgabe 2

a) Es ergeben sich folgende Lösungen:

(1) $(x-3)(x+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \vee x = -5$

(2) $(x-4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

(3) $x^2 + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -6$ hat keine Lösung

(4) $x^2 + 8x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$

> **TIPP** Die Angaben der Lösungen genügen.

b) Folgende Gleichungen sind möglich:

(1) $(x-7)(x+3) = 0$

(2) $(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8}) = 0$

(3) $(x-5)^2 = 0$

Aufgabe 1: Herzlich willkommen

Eine Firma produziert herzförmige Dekoanhänger aus Metall (Abbildung 1).
Jedes Herz besteht aus einem Quadrat mit der Kantenlänge 6 cm, an das zwei Halbkreise mit einem Radius von jeweils 3 cm angesetzt sind (Abbildung 2).

Abbildung 1: herzförmiger Dekoanhänger

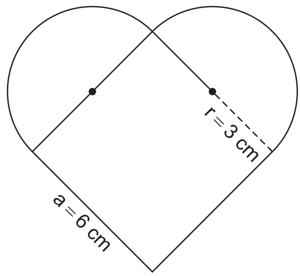


Abbildung 2: geometrische Form eines Herzens

a) Zeichne ein Herz in Originalgröße in dein Heft.

b) Die Herzen werden aus dünnen Metallblechen hergestellt.
1 dm^2 des Metallblechs wiegt 117 g.
Berechne das Gewicht eines Herzens.

Um die Breite b und die Höhe h eines Herzens zu bestimmen, wird eine Skizze angefertigt (Abbildung 3). Hier gilt: Die Strecke $\overline{AB}$ entspricht der Breite b. $\overline{AB}$ geht durch die Mittelpunkte M_1 und M_2 der angesetzten Halbkreise.

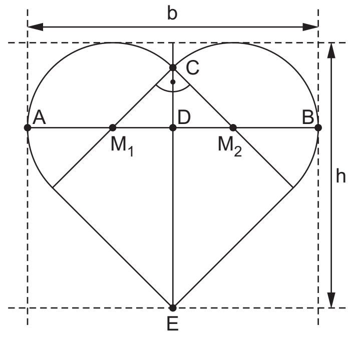


Abbildung 3: Skizze zur Berechnung der Breite b und der Höhe h

c) Berechne die Breite b eines Herzens.

d) Mithilfe der Abbildung 3 kann die Höhe h der Herzen berechnet werden.

(1) Berechne die Länge der Strecke $\overline{DE}$.

(2) Begründe, dass für die Höhe h der Herzen gilt: $h = |\overline{DE}| + 3$.

„Bei meinem Rechentrick muss man die Summanden paarweise zusammenfassen. Daher nehme ich an, dass meine Formel für ungerade Zahlen nicht gilt“, meint Merle.
Silas hat eine Idee: „Wenn u eine ungerade Zahl ist, dann ist $u-1$ eine gerade Zahl. Für gerade Zahlen kann ich Merles Formel nutzen und anschließend die fehlende Zahl addieren.“

f) Zeige mit Silas Idee, dass für ungerade Zahlen der Term $\frac{1}{2}(u-1)\cdot u+u$ gilt.

TIPP **Lösungshinweise zum Prüfungsteil II**

Teilaufgabe 1 a

Im Aufgabentext ist die Figur genau beschrieben.

Beachte zusätzlich die Abbildung 2.

Wähle eine geeignete Lage für das Quadrat, damit der Herzcharakter deutlich wird.

Achte darauf, dass am Ende nur die Umrisse des Herzens zu sehen sind. Entferne Hilfslinien im Inneren.

Teilaufgabe 1 b

Beachte aus welchen Teilfiguren das Herz zusammengesetzt ist.

Berechne dann zunächst den Flächeninhalt.

Achte darauf, den Flächeninhalt in der Einheit dm^2 anzugeben.

Der Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Gewicht ist im Text angegeben.

Teilaufgabe 1 c

Mithilfe der Abbildung 3 kannst du die Breite b in geeignete Teilstrecken zerlegen.

Charakterisiere die Lage der Punkte A, B, C, M_1 und M_2 mit Blick auf die beiden Halbkreise.

Der Punkt D liegt im Quadrat und ist für die Berechnung der Breite nicht hilfreich.

Teilaufgabe 1 d

Die gesuchte Strecke ist eine Teilstrecke der Diagonalen im Quadrat.

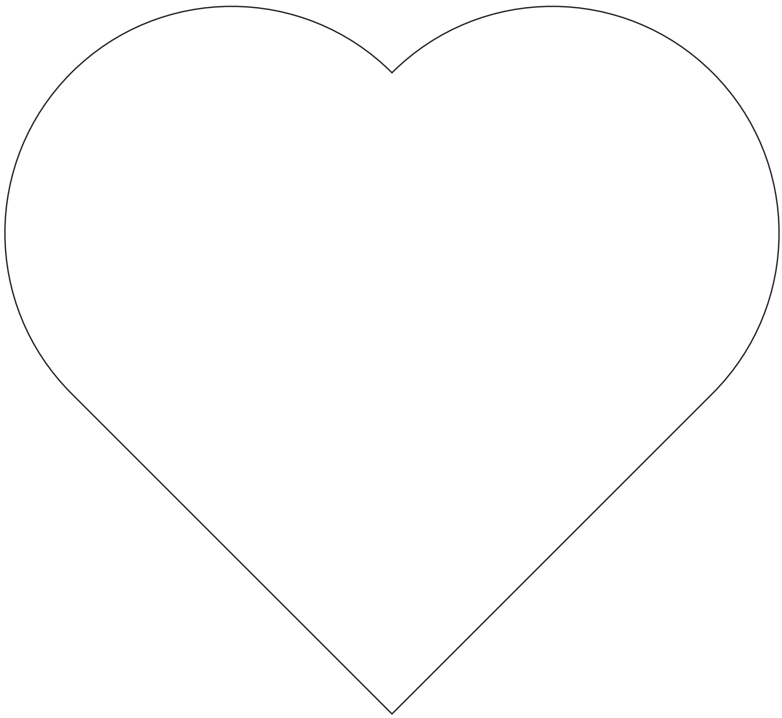
Berechne die zweite Teilstrecke mithilfe des Dreiecks M_1DC.

Verwende dazu den Satz des Pythagoras.

Lösungsvorschlag zum Prüfungsteil II

Aufgabe 1

a)



b) Zunächst wird der Flächeninhalt A des Herzens in der Einheit dm^2 berechnet:

$$A = 2 \cdot A_{Halbkreis} + A_{Quadrat} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + a^2 = \pi \cdot r^2 + a^2$$

Einsetzen der Werte ergibt:
$A = \pi \cdot (3\ cm)^2 + (6\ cm)^2 \approx 64\ cm^2 = 0{,}64\ dm^2$

$1\ dm^2$ des Metallblechs wiegt 117 g. Daraus folgt für das Gewicht eines Herzens:
$0{,}64 \cdot 117\ g \approx 75\ g$
Das Herz wiegt etwa 75 Gramm.

c) Die Breite b eines Herzens setzt sich aus den folgenden Teilstrecken zusammen:
$b = \overline{AM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2B}$

Die Strecken $\overline{AM_1}$ und $\overline{M_2B}$ entsprechen jeweils dem Kreisradius r.

Die Strecke $\overline{M_1M_2}$ ist die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck M_1M_2C.
Die beiden Katheten $\overline{M_1C}$ und $\overline{M_2C}$ entsprechen jeweils dem Kreisradius r.

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:
$\overline{M_1M_2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2 \cdot (3\text{ cm})^2} \approx 4{,}2\text{ cm}$

Damit ergibt sich für die Breite b:
$b = \overline{AM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2B} = 3\text{ cm} + 4{,}2\text{ cm} + 3\text{ cm} = 10{,}2\text{ cm}$

d) (1) Die Strecke $\overline{CE}$ ist die Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge $a = 6$ cm. Für ihre Länge gilt somit:
$\overline{CE} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot (6\text{ cm})^2} \approx 8{,}5\text{ cm}$

Für die gesuchte Strecke $\overline{DE}$ gilt:
$\overline{DE} = \overline{CE} - \overline{CD}$

$\overline{CD}$ ist eine Kathete in dem rechtwinkligen Dreieck M_1DC. Die Hypotenuse $\overline{CM_1}$ ist gleich dem Kreisradius r, $\overline{M_1D}$ ist halb so lang wie die Strecke $\overline{M_1M_2}$. Die Länge dieser Strecke wurde in Teilaufgabe c mit 4,2 cm berechnet.
Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:
$(\overline{CM_1})^2 = (\overline{CD})^2 + (\overline{M_1D})^2$

$$\overline{CD} = \sqrt{(\overline{CM_1})^2 - (\overline{M_1D})^2} = \sqrt{(3\text{ cm})^2 - \left(\frac{4{,}2\text{ cm}}{2}\right)^2} \approx 2{,}1\text{ cm}$$

Alternative Lösung für die Berechnung von $\overline{CD}$:
Das rechtwinklige Dreieck M_1DC ist zudem gleichschenklig, also sind die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{M_1D}$ gleich lang.
Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:
$(\overline{CM_1})^2 = (\overline{CD})^2 + (\overline{M_1D})^2$

$(\overline{CM_1})^2 = 2 \cdot (\overline{CD})^2$

$$(\overline{CD})^2 = \frac{(\overline{CM_1})^2}{2}$$

$$\overline{CD} = \frac{\overline{CM_1}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}1\text{ cm}$$

Für die gesuchte Strecke $\overline{DE}$ gilt:
$\overline{DE} = \overline{CE} - \overline{CD} = 8{,}5\text{ cm} - 2{,}1\text{ cm} = 6{,}4\text{ cm}$

(2) Der Abstand des Punktes D von der oberen gestrichelten Begrenzungslinie ist genauso groß wie der Abstand des Punktes M_2 von dieser Linie. Die gestrichelte Linie ist die Tangente an den rechten Halbkreis. Somit entspricht der Abstand des Punktes M_2 von der Tangente dem Kreisradius $r = 3$ cm.
Somit gilt für die Höhe h:
$h = \overline{DE} + 3$