2025 Training

Abschlussprüfung

MEHR ERFAHREN

Realschule Bayern

Mathematik II/III

+ *Ausführliche Lösungen*
+ *Hinweise und Tipps*

LÖSUNGEN

STARK

Inhalt

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 freigegeben sind, können die dazugehörigen Lösungen als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dies ist das Lösungsbuch zu dem Band **Training Abschlussprüfung 2025, Mathematik II/III, Realschule, Bayern** (Bestell-Nr. J0910N). Es enthält zu allen Aufgaben von unseren Autoren ausgearbeitete Lösungen, die jeden Rechenschritt ausführlich erklären. Dabei wird besonderer Wert auf die Lösungsansätze und Vorüberlegungen gelegt. Zur Veranschaulichung und dem besseren Verständnis der Lösungen helfen dir zahlreiche Skizzen.

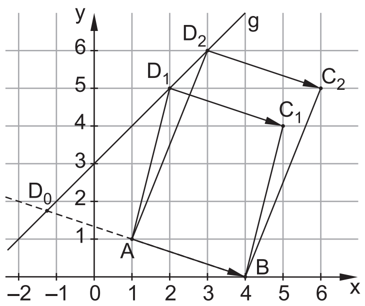
Versuche stets, jede Aufgabe zunächst selbstständig zu lösen, und dann deine Lösung mit den Lösungen im Buch zu vergleichen. Solltest du nicht weiterkommen, helfen dir die **Hinweise und Tipps**. Hast du eine Aufgabe nicht richtig gelöst, ist es ganz wichtig, diese zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal durchzurechnen. Durch das Üben wirst du dich sicher fühlen und kannst beruhigt in die Prüfung gehen.

Wir wünschen dir viel Erfolg!

Autoren: Training Grundwissen und komplexe Aufgaben: Markus Hochholzer, Markus Schmidl
Aufgaben im Stil der Prüfung und Original-Abschlussprüfung: Alois Einhauser

Hinweise und Tipps

37 a)



- Einzeichnen der Geraden g: $y = x + 3$
  y-Achsenabschnitt $t = 3$
  Steigung $m = 1$
- Einzeichnen der Punkte D_1 und D_2 auf der Geraden g mithilfe der bekannten x-Koordinaten
- Parallelverschiebung des Punktes D_1 auf C_1 mit dem Vektor $\overline{AB}$, ebenso mit D_2

Berechnung des Flächeninhalts von ABC_1D_1:
Zuerst: Koordinaten von D_1:
$y = 2 + 3 = 5$ — Einsetzen von $x = 2$ in die Geradengleichung
$D_1(2\,|\,5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD_1} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Flächeninhalts mithilfe der Determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \text{FE} = (3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1)\ \text{FE} = (12 + 1)\ \text{FE} = 13\ \text{FE}$$

$\overrightarrow{AB}$ zuerst

b) $D_n(x\,|\,x+3)$, da $y = x + 3$

In Abhängigkeit von x bedeutet: Rechne nicht mit speziellen Koordinaten für D. Verwende die allgemeinen Koordinaten der Punkte D_n, die durch die Funktionsgleichung der Geraden festgelegt sind.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ x+3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ x+2 \end{pmatrix}$$

Aufspannende Vektoren mit „Spitze minus Fuß“

$$A(x) = \begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} \text{FE}$$

$$A(x) = [3 \cdot (x+2) - (-1) \cdot (x-1)]\ \text{FE}$$

$$A(x) = (3x + 6 + x - 1)\ \text{FE}$$

$$A(x) = (4x + 5)\ \text{FE}$$

c)

$$\begin{array}{|ll} & A(x) = (4x+5)\ \text{FE} \\ \wedge & A \quad = 10\ \text{FE} \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 10 = 4x + 5 \quad (\mathrm{I} = \mathrm{II}) \quad |-5$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 = 4x \quad |:4$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{4}$$

$$\mathbb{L} = \left\{1\frac{1}{4}\right\}$$

$$D_n(x\,|\,x+3) \;\Rightarrow\; D_3\left(1\frac{1}{4}\,\middle|\,1\frac{1}{4}+3\right) = D_3\left(1\frac{1}{4}\,\middle|\,4\frac{1}{4}\right)$$

$x = 1\frac{1}{4}$ einsetzen

d) Es entsteht kein Parallelogramm mehr, wenn der Punkt D_n auf den Punkt D_0 auf der Geraden AB fällt. Aus dem Parallelogramm wird dann eine Strecke.

siehe Zeichnung in Teilaufgabe a

Hinweise und Tipps

Der Flächeninhalt ist in diesem Fall 0 FE.

$$\left|\begin{array}{l} A(x) = (4x+5)\text{ FE} \\ \wedge \quad A = 0\text{ FE} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & 4x + 5 = 0 \quad (\text{I} = \text{II}) & \lvert -5 \\ \Leftrightarrow & 4x = -5 & \lvert :4 \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{5}{4} & \end{array}$$

$$L = \left\{-1\frac{1}{4}\right\}$$

oder:

Bestimmung der Geradengleichung von AB:

Vektor $\overrightarrow{AB} = \binom{3}{-1}$: y-Koordinate durch x-Koordinate ergibt die Steigung

Steigung von AB: $m = -\frac{1}{3}$

Einsetzen von B in die Normalform von AB:

Normalform $y = mx + t$ mit $B(4\,|\,0)$ und $m = -\frac{1}{3}$

$$0 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + t$$

$$t = \frac{4}{3}$$

Geradengleichung von AB: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

Berechnung der Koordinaten von D_0:
Schnittpunkt der Geraden g mit AB:

$$\begin{array}{rl} \text{AB:} & \left|\begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \\ \wedge \; y = x + 3 \end{array}\right. \\ \text{g:} & \end{array}$$

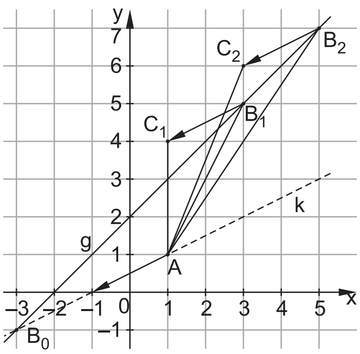
$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = x + 3 \quad (\text{I} = \text{II}) & \left\lvert -x - \frac{4}{3}\right. \\ \Leftrightarrow & -\frac{4}{3}x = \frac{5}{3} & \left\lvert \cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right. \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{5}{4} & \end{array}$$

$$L = \left\{-1\frac{1}{4}\right\}$$

Es existieren Parallelogramme ABC_nD_n für $x > -1\frac{1}{4}$.

Für $x < -1\frac{1}{4}$ ändert sich der Umlaufsinn der Parallelogramme.

38 a)



- Zeichnen der Geraden g: $y = x + 2$
  y-Achsenabschnitt $t = 2$
  Steigung $m = 1$ (1 nach rechts, 1 nach oben)
- Einzeichnen der beiden Punkte $B_1(3\,|\,5)$ und $B_2(5\,|\,7)$ auf der Geraden. Die y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen der x-Koordinaten in die Geradengleichung $y = x + 2$.
- Parallelverschiebung der Punkte B_1 und B_2 mit dem Vektor $\overrightarrow{B_nC_n} = \binom{-2}{-1}$ ergibt die Punkte C_1 und C_2.

  (Von B_n aus jeweils „2 nach links und 1 nach unten".)

Hinweise und Tipps

b) Flächeninhalt der Dreiecke:

Aufspannende Vektoren:

$\overrightarrow{B_nC_n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{B_nA} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-(x+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -1-x \end{pmatrix}$

„Spitze minus Fuß"
Verwende die allgemeinen Koordinaten der Punkte $B_n(x \mid x+2)$.

Berechnung des Flächeninhalts mithilfe der Determinante:

$A_{\Delta AB_nC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1-x \\ -1 & -1-x \end{vmatrix}$ FE

Beachte die Reihenfolge der Vektoren in der Determinante.

$A_{\Delta AB_nC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot [-2 \cdot (-1-x) - (-1) \cdot (1-x)]$ FE

Tipp: Wenn du die Determinante auflöst, setze immer eine eckige Klammer.

$A_{\Delta AB_nC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot [2 + 2x - (-1+x)]$ FE

Um Vorzeichenfehler zu vermeiden, gehe schrittweise vor und löse die Klammern von innen nach außen auf.

$A_{\Delta AB_nC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot [2 + 2x + 1 - x]$ FE

$A_{\Delta AB_nC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot (3 + x)$ FE

$A_{\Delta AB_nC_n}(x) = (0{,}5x + 1{,}5)$ FE

c) $\begin{array}{|ll} & A(x) = (0{,}5x+1{,}5) \text{ FE} \\ \wedge & A \quad\;\; = 4 \text{ FE} \\ \hline \end{array}$

Aus Teilaufgabe b

$\Rightarrow \quad 0{,}5x + 1{,}5 = 4 \qquad (\text{I} = \text{II}) \quad |-1{,}5$

$\Leftrightarrow \qquad 0{,}5x = 2{,}5 \qquad |:0{,}5$

$\Leftrightarrow \qquad x = 5$

$\mathbb{L} = \{5\}$

Das ist die x-Koordinate von B_2, also hat das Dreieck AB_2C_2 in der Zeichnung den Flächeninhalt 4 FE.

d) Es entsteht kein Dreieck, wenn B_n auf B_0 fällt. Das Dreieck wird dann zu einer Strecke.

Der Flächeninhalt ist in diesem Fall 0 FE.

$\begin{array}{|ll} & A(x) = (0{,}5x+1{,}5) \text{ FE} \\ \wedge & A(x) = 0 \text{ FE} \\ \hline \end{array}$

$\Rightarrow \quad 0{,}5x + 1{,}5 = 0 \qquad (\text{I} = \text{II}) \quad |-1{,}5$

$\Leftrightarrow \qquad 0{,}5x = -1{,}5 \qquad |:0{,}5$

$\Leftrightarrow \qquad x = -3$

$\mathbb{L} = \{-3\}$

oder:

Es entsteht kein Dreieck, wenn die Punkte A, B_n und C_n auf **einer** Geraden liegen.

siehe Zeichnung in Teilaufgabe a

Diese Gerade muss durch A verlaufen und parallel zum Vektor $\overrightarrow{B_nC_n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sein. Diese Gerade wird mit k bezeichnet und ihre Gleichung berechnet:

Die Steigung der Geraden k ist: $m = \frac{-1}{-2} = 0{,}5$

Vektor $\overrightarrow{B_nC_n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$: y-Koordinate durch x-Koordinate ergibt die Steigung

Einsetzen von $A(1 \mid 1)$ in die Normalform von k:

Normalform $y = mx + t$ mit $A(1 \mid 1)$ und $m = 0{,}5$

$1 = 0{,}5 \cdot 1 + t$

$\Leftrightarrow \quad t = 0{,}5$

Geradengleichung von k: $y = 0{,}5x + 0{,}5$

Musterprüfung

Teil A

Hinweise und Tipps

Aufgabe A 1.1

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ -2 - 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Mit $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (vgl. Angabe) ergeben sich die Steigungen:

$m_{AB} = -\frac{3}{4}$ und $m_{AC} = \frac{4}{3}$

Somit gilt:

$m_{AB} \cdot m_{AC} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$

$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$

Folglich gilt $AB \perp AC$.

Also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

Mithilfe der Steigungen m_{AB} und m_{AC} der Geraden AB und AC zeigt man, dass diese zueinander senkrecht verlaufen.

Aufgabe A 1.2

$A_{Segment} = A_{Sektor\ ABC} - A_{\Delta ABC}$

$A_{Segment} = \frac{1}{4} \cdot |\overline{AB}|^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|$

$A_{Segment} = \left(\frac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot 5^2\right)$ FE

$A_{Segment} = \left(\frac{25}{4} \cdot \pi - \frac{25}{2}\right)$ FE

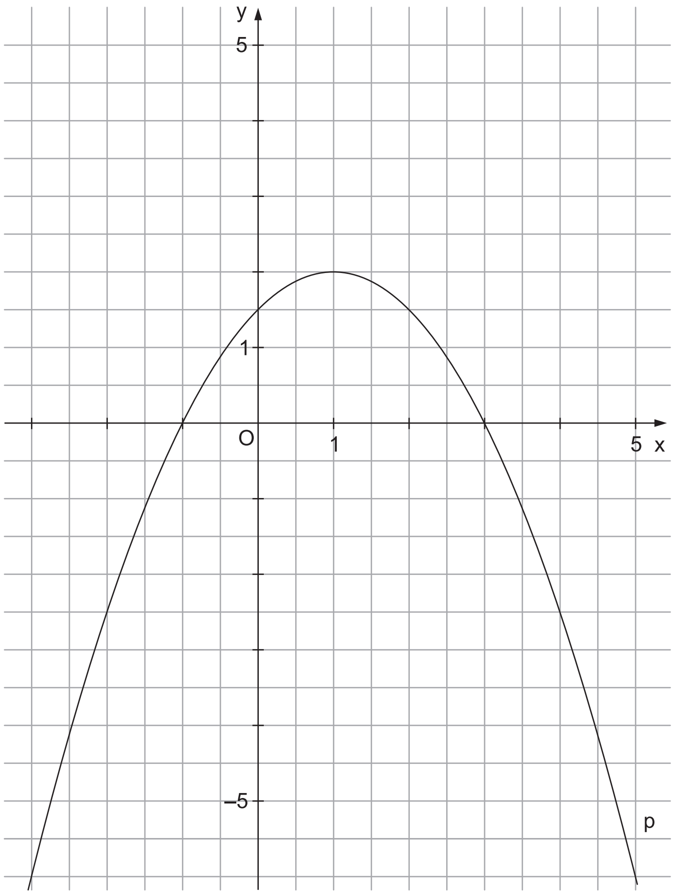
$A_{Segment} = (6{,}25 \cdot \pi - 12{,}5)$ FE

Man zieht vom Flächeninhalt des Kreissektors ABC den Flächeninhalt des Dreiecks ABC ab.

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei A. Somit handelt es sich beim Kreissektor ABC um einen Viertelkreis. Die Längen der Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ entsprechen dem Radius des Viertelkreises: $|\overline{AB}| = 5$ LE und $|\overline{AC}| = 5$ LE

Hinweise und Tipps

Aufgabe A 2



Die Parabel p hat den Scheitel S(1 | 2), ist nach unten geöffnet und mit dem Faktor 0,5 gestaucht.

- Von S geht man um 1 LE nach links bzw. rechts und um $0{,}5 \cdot 1^2$ LE = 0,5 LE nach unten.
- Von S geht man um 2 LE nach links bzw. rechts und um $0{,}5 \cdot 2^2$ LE = 2 LE nach unten.
- Von S geht man um 3 LE nach links bzw. rechts und um $0{,}5 \cdot 3^2$ LE = 4,5 LE nach unten …

Aufgabe A 3

$$0{,}5x^2 + 18 = 6x \qquad \vert -6x \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}5x^2 - 6x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-(-6) - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 18}}{2 \cdot 0{,}5} \quad \vee \quad x = \frac{-(-6) + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 18}}{2 \cdot 0{,}5}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6-0}{1} \quad \vee \quad x = \frac{6+0}{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 6$$

$L = \{6\}$

oder:

$$0{,}5x^2 - 6x + 18 = 0 \qquad \vert \cdot 2 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-6)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 6$$

$L = \{6\}$

Original-Abschlussprüfung

Abschlussprüfung 2023

Teil A

Hinweise und Tipps

Aufgabe A 1

Berechnung der Länge von $\overline{DE}$ im rechtwinkligen Dreieck AED:

$$\tan \sphericalangle BAD = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{AE}|} \qquad | \cdot |\overline{AE}|$$

$$|\overline{DE}| = |\overline{AE}| \cdot \tan \sphericalangle BAD$$

$$|\overline{DE}| = 4 \cdot \tan 60° \text{ cm}$$

$$|\overline{DE}| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Zur Berechnung der Länge der Strecke $\overline{DE}$ betrachtet man das rechtwinklige Dreieck AED, von dem eine Seitenlänge und ein Winkel bekannt sind.

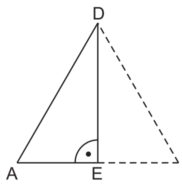
oder:

Berechnung der Länge von $\overline{DE}$ im „halben gleichseitigen Dreieck“:

$$|\overline{DE}| = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2 \cdot |\overline{AE}|$$

$$|\overline{DE}| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Wenn man erkennt, dass sich das Dreieck AED zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $2 \cdot |\overline{AE}|$ und der Höhe $|\overline{DE}|$ ergänzen lässt, kann man $|\overline{DE}|$ direkt aus $|\overline{AE}|$ berechnen. Dazu nutzt man den allgemeingültigen Zusammenhang zwischen der Höhe h und der Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks: $h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$



Berechnung von $|\overline{DC}|$:

$$|\overline{DC}| = |\overline{AB}| - 2 \cdot |\overline{AE}|$$

$$|\overline{DC}| = (11 - 2 \cdot 4) \text{ cm}$$

$$|\overline{DC}| = 3 \text{ cm}$$

Da das Trapez ABCD gleichschenklig und somit achsensymmetrisch ist, lässt sich die Länge der kurzen Seite einfach aus den beiden Streckenlängen $|\overline{AB}|$ und $|\overline{AE}|$ berechnen.

Berechnung des Flächeninhalts A:

$$A = \frac{1}{2}\left(|\overline{AB}| + |\overline{DC}|\right) \cdot |\overline{DE}|$$

$$A = 0{,}5 \cdot (11 + 3) \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A = 28\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Aufgabe A 2.1

$y = -0{,}5 \cdot (x+2)^2 + 1{,}5 \qquad x, y \in \mathbb{R}$

Der Stauchungs-/Streckungsfaktor der Parabel p ist $-0{,}5$. Für die Scheitelform der Parabel p gilt somit:

$y = -0{,}5(x - x_S)^2 + y_S$

Hierbei sind x_S die x-Koordinate und y_S die y-Koordinate des Scheitels.

Hinweise und Tipps

Aufgabe A 2.2

☒ $\{y \mid y \leq 1{,}5\}$

Eine Parabel mit einer Gleichung der Form $y = -0{,}5x^2 + bx + c$ ist nach unten geöffnet. Außerdem hat der Scheitel des Graphen von p die y-Koordinate $y_S = 1{,}5$.

Aufgabe A 3.1

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Für jeden der 4 angeschlagenen Töne gibt es jeweils 5 Möglichkeiten, nämlich C, D, E, G, A.

Aufgabe A 3.2

$\frac{1}{625}$

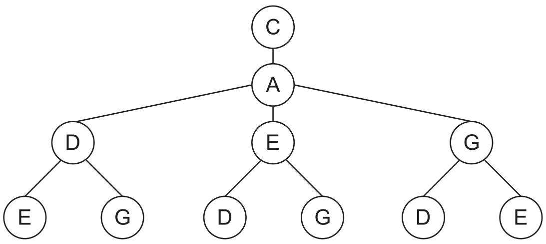
Die Melodie A – C – D – C ist eine der 625 Möglichkeiten.

Aufgabe A 3.3

$\frac{5}{625}$

Da es 5 verschiedene Töne gibt, gibt es auch 5 verschiedene Möglichkeiten, die Melodie mit demselben Ton zu spielen. Bei 5 der 625 möglichen Melodien wird also viermal dieselbe Taste angeschlagen.

Aufgabe A 3.4



Da alle Töne der Melodie verschieden sein sollen und C und A bereits gespielt wurden, bleiben für den dritten Ton nur noch D, E und G. Für den vierten Ton verbleiben jeweils nur noch die zwei nicht gespielten Töne.