2025

Realschule

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR
ERFAHREN

Bayern

Mathematik I

+ *Offizielle Musteraufgaben*

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Hinweise

Übungsaufgaben

Teil A – ohne Taschenrechner

Teil B – mit Taschenrechner

Aufgaben im Stil der Prüfung

Beispielaufgaben

Musterprüfung

Abschlussprüfungsaufgaben

Abschlussprüfung 2019

Abschlussprüfung 2020

Abschlussprüfung 2021

Abschlussprüfung 2022

Abschlussprüfung 2023

Abschlussprüfung 2024 . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**
Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Autor
Übungsaufgaben (inkl. Lösungen) sowie Lösungen der Beispielaufgaben, Musterprüfung und der Abschlussprüfungsaufgaben: RSD Alois Einhauser

Daten und Zufall

1.1 Marianne erinnert sich bei einem Regensburger Autokennzeichen nur noch daran, dass in der Mitte zwei unterschiedliche Buchstaben standen und dann eine dreistellige Zahl folgte. Ob hier gleiche Ziffern vorkamen, konnte sie nicht sagen.

R – XX – XXX

Ermitteln Sie, wie viele Möglichkeiten es für das Kennzeichen gibt.

Hinweis: Als Buchstaben kommen die 26 Großbuchstaben des lateinischen Alphabets in Frage.

1.2 Lea erinnert sich bei einem Augsburger Autokennzeichen nur noch daran, dass in der Mitte zwei gleiche Buchstaben standen und dann eine dreistellige Zahl folgte. Dabei waren die Hunderter- und die Zehnerstelle sicher gleich und es handelte sich um eine gerade Zahl.

A – XX – XXX

Ermitteln Sie, wie viele Möglichkeiten es für das Kennzeichen gibt.

Hinweis: Als Buchstaben kommen die 26 Großbuchstaben des lateinischen Alphabets in Frage.

2 Aus zwölf Eissorten werden je vier verschiedene in einem Becher gekauft. Die Anordnung der Eissorten ist egal.

Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt.

3 Eine Klasse besteht aus 24 Schülerinnen und Schülern. In der Klasse gibt es nur einen Felix. Für eine Gruppenarbeit sollen per Losverfahren Vierergruppen gebildet werden.

Ermitteln Sie, wie viele Möglichkeiten der Gruppenzusammensetzung es für die Gruppe gibt, in der der Schüler Felix ist.

4 Bei einem Turnier gibt es elf Teams. Alle Teams sollen genau einmal gegeneinander spielen.

Ermitteln Sie, wie viele Spiele es gibt.

5.0 Beim Spiel „Mastermind professional" wählt Spieler A aus acht verschiedenfarbigen Stiften fünf aus und ordnet diese in einer Reihe an. Spieler B muss diesen Farb-Code erraten.

5.1 Bestimmen Sie die Gesamtanzahl an möglichen Farb-Codes.

5.2 Spieler B hat bereits beim ersten Versuch erraten, welche Farben Spieler A ausgewählt hat. Er muss nun nur noch die Reihenfolge herausfinden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die Farbstifte anzuordnen.

5.3 In den folgenden Teilaufgaben sind für jede der acht Farben fünf Stifte vorhanden.

Bestimmen Sie die Anzahl an möglichen Farb-Codes, wenn die fünf ausgewählten Stifte im Farb-Code nicht verschiedenfarbig sein müssen.

5.4 Bestimmen Sie die Anzahl an möglichen Farb-Codes, wenn der Farb-Code aus vier grünen und einem gelben Stift bestehen soll.

5.5 Bestimmen Sie die Anzahl an möglichen Farb-Codes, wenn der Farb-Code aus drei blauen und zwei grünen Stiften bestehen soll.

6.0 Bei einer Verlosung befinden sich insgesamt 20 Lose in der Trommel.
Es wird mit „jedes vierte Los gewinnt" geworben.

6.1 Bestimmen Sie, wie viele Gewinnlose und wie viele Nieten in der Lostrommel sind.

6.2 Herr Kunz kauft zwei Lose.

Zeichnen Sie ein zugehöriges Baumdiagramm, in dem die Wahrscheinlichkeiten ersichtlich sind. Bestimmen Sie sodann …

a) die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Kunz zwei Gewinne zieht.

b) die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Kunz zwei Nieten zieht.

c) die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Kunz mindestens einen Gewinn zieht.

6.3 Nachdem Herr Klug beobachtet hat, dass Herr Kunz zwei Nieten gezogen hatte, kauft Herr Klug zwei Lose.

Zeichnen Sie ein zugehöriges Baumdiagramm, in dem die Wahrscheinlichkeiten ersichtlich sind. Bestimmen Sie sodann die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Klug zwei Gewinne zieht.

Lösungsvorschlag

1.1 Da die Buchstaben verschieden waren, gibt es hier $26 \cdot 25 = 650$ Möglichkeiten.

Da es eine 3-stellige Zahl war, kommen in Frage:
- für die Hunderterstelle nur die Ziffern 1 bis 9 (9 Möglichkeiten)
- für die Zehner- sowie Einerstelle die Ziffern 0 bis 9 (jeweils 10 Möglichkeiten)

Für die 3-stellige Zahl gibt es also $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es somit $650 \cdot 900 = 585\,000$ Möglichkeiten.

1.2 Da die Buchstaben gleich waren, ist der zweite Buchstabe durch den ersten Buchstaben festgelegt und es gibt hier 26 Möglichkeiten.

Da es eine 3-stellige Zahl war, kommen für die Hunderterstelle nur die Ziffern 1 bis 9 in Frage (9 Möglichkeiten).

Da die Hunderter- und die Zehnerstelle gleich waren, ist die Zehnerstelle durch die Hunderterstelle festgelegt (keine weitere Möglichkeit).

Da die Zahl außerdem gerade war, kommen nur die Einerziffern 0, 2, 4, 6 und 8 in Frage (5 Möglichkeiten).

Für die 3-stellige Zahl gibt es also $9 \cdot 5 = 45$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also $26 \cdot 45 = 1\,170$ Möglichkeiten.

2 Für die Auswahl von 4 verschiedenen Eissorten aus den 12 zur Verfügung stehenden gibt es $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$ Möglichkeiten.

> **TIPP** Da die Anordnung der Eissorten egal ist, muss durch die Anzahl der Anordnungen (Permutationen) geteilt werden.

Es gibt $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Anordnungen von 4 Eissorten.

Die gesuchte Anzahl an Möglichkeiten beträgt also:

$$\frac{11\,880}{24} = 495$$

oder:

Diese Frage ist gleichbedeutend mit: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 aus 12 zu ziehen?

Es gibt also $\frac{12!}{(12-4)! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$ Möglichkeiten.

3 Da Felix in seiner Gruppe feststeht, müssen noch 3 Gruppenmitglieder „gezogen“ werden. Hierfür gibt es $23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$ Möglichkeiten.

Da es egal ist, in welcher Reihenfolge die Gruppenmitglieder gezogen werden, und es für 3 Personen $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschiedene Anordnungen (Permutationen) gibt, beträgt die Anzahl der möglichen Gruppenzusammensetzungen:

$$\frac{10\,626}{6} = 1\,771$$

oder:

Diese Frage ist gleichbedeutend mit: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 aus 23 zu ziehen?

Es gibt also $\frac{23!}{(23-3)! \cdot 3!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,771$ Möglichkeiten.

4 Jedes der 11 Teams spielt gegen 10 andere. Das wären $11 \cdot 10 = 110$ mögliche Partien.

Da jedes Team genau einmal gegen ein anderes spielt, wird nicht zwischen "Team A gegen Team B" oder "Team B gegen Team A" unterschieden.

Somit halbiert sich die Anzahl an möglichen Partien auf insgesamt 55.

oder:

Team 1 spielt gegen 10 gegnerische Teams.

Team 2 spielt noch gegen 9 weitere Teams
(neben dem bereits stattgefundenen Spiel gegen Team 1).

Team 3 spielt noch gegen 8 weitere Teams
(neben den bereits stattgefundenen Spielen gegen Team 1 und 2).

…

Team 10 spielt noch gegen 1 weiteres Team
(neben den bereits stattgefundenen Spielen gegen die Teams 1 bis 9).

Die Summe an Spielen beträgt somit:

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

Es finden 55 Spiele statt.

oder:

Diese Frage ist gleichbedeutend mit: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 aus 11 zu ziehen?

Die Anzahl der Spiele beträgt also:

$$\frac{11!}{(11-2)! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

Aufgabe B 1

BE

B 1.0 Vitamin D kann im menschlichen Körper produziert werden, wenn Sonnenstrahlung unter bestimmten Bedingungen auf die Haut trifft. Im Winterhalbjahr nimmt daher die Konzentration von Vitamin D im Körper normalerweise ab.
Bei Andreas wurde Ende September eine Anfangskonzentration von 55 Nanogramm Vitamin D pro Milliliter Blut ($55\,\frac{\text{ng}}{m\ell}$) gemessen. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Wochen und der verbleibenden Konzentration $y\,\frac{\text{ng}}{m\ell}$ an Vitamin D lässt sich bei Andreas näherungsweise durch die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 55 \cdot 0{,}93^x$ $(x \in \mathbb{R}_0^+,\ y \in \mathbb{R}^+)$ beschreiben.

B 1.1 Um wie viel Prozent reduziert sich folglich bei Andreas die Konzentration an Vitamin D in einer Woche? Ergänzen Sie.

Die Konzentration reduziert sich in einer Woche um $\boxed{\qquad \%.}$ 1

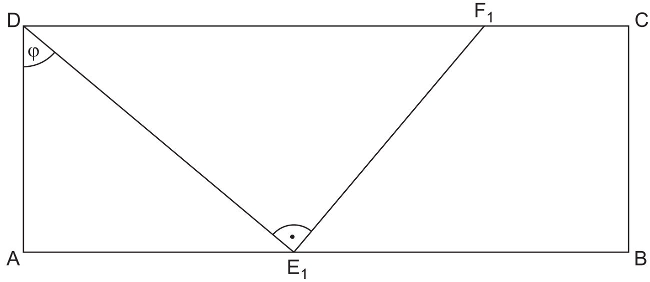
B 1.2 Berechnen Sie mithilfe der Funktion f_1 die Konzentration an Vitamin D bei Andreas nach 21 Tagen.
Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. 1

B 1.3 Berechnen Sie, in welcher Woche sich die Anfangskonzentration an Vitamin D bei Andreas entsprechend der Funktion f_1 halbiert. 2

B 1.4 Bei Stephan wurde gleichzeitig mit Andreas eine Messung begonnen. Bei Stephan lässt sich der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Wochen und der verbleibenden Konzentration $y\,\frac{\text{ng}}{m\ell}$ an Vitamin D annähernd durch die Funktion f_2 mit der Gleichung $y = 51 \cdot 0{,}91^x$ $(x \in \mathbb{R}_0^+,\ y \in \mathbb{R}^+)$ beschreiben.
Ist es unter diesen Voraussetzungen möglich, dass die Konzentrationen an Vitamin D zu einem Zeitpunkt bei Stephan und Andreas den gleichen Wert erreichen?
Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne Rechnung. 1

Aufgabe B 2

B 2.0 Gegeben ist das Rechteck ABCD.
Punkte E_n auf der Seite $\overline{AB}$ und Punkte F_n auf der Seite $\overline{CD}$ legen zusammen mit dem Punkt D Dreiecke DE_nF_n fest.
Die Winkel ADE_n haben das Maß φ mit $\varphi \in [24{,}30°; 65{,}70°]$.
Es gilt: $|\overline{AB}| = 8\text{ cm}$; $|\overline{AD}| = 3\text{ cm}$; $\sphericalangle F_nE_nD = 90°$.
Die Skizze zeigt das Dreieck DE_1F_1 für $\varphi = 50°$.



B 2.1 Begründen Sie, weshalb die Winkel DF_nE_n stets das Maß φ haben. 1

B 2.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $\overline{CF_n}$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$|\overline{CF_n}|(\varphi) = \left(8 - \dfrac{3}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}\right)\text{cm}.$ 3

B 2.3 Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{CF_1}$.
Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. 1

Lösungsvorschlag

B 1.1

TIPP Die Basis 0,93 gibt an, dass sich die Konzentration in einer Woche auf 93 % verringert. Der gesuchte Prozentsatz, um den verringert wird, beträgt also: 100 % – 93 % = 7 %

Die Konzentration reduziert sich in einer Woche um **7** %.

B 1.2

TIPP 21 Tage sind 3 Wochen.

$y = 55 \cdot 0{,}93^3$
$y = 44{,}24$

Nach 21 Tagen beträgt die Konzentration an Vitamin D bei Andreas $44{,}24\,\frac{\text{ng}}{m\ell}$.

B 1.3

TIPP Gesucht ist die Belegung von x, für die $y = 55 \cdot 0{,}93^x$ die Hälfte der Anfangskonzentration ergibt.

$$
\begin{aligned}
& 0{,}5 \cdot 55 = 55 \cdot 0{,}93^x \quad |:55 \qquad x \in \mathbb{R}_0^+ \\
\Leftrightarrow\quad & 0{,}5 = 0{,}93^x \\
\Leftrightarrow\quad & x = \log_{0{,}93} 0{,}5 \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}93} \\
\Leftrightarrow\quad & x = 9{,}6
\end{aligned}
$$

$L = \{9{,}6\}$

Die Konzentration an Vitamin D halbiert sich in der 10. Woche.

B 1.4

TIPP Andreas „startet“ mit einer Anfangskonzentration von $55\,\frac{\text{ng}}{m\ell}$, die wöchentlich um 7 % abnimmt. Stephan „startet“ mit einer Anfangskonzentration von $51\,\frac{\text{ng}}{m\ell}$, die wöchentlich um 9 % abnimmt.

Stephans Anfangswert ist kleiner und nimmt schneller ab als der von Andreas. Die Konzentrationen können folglich niemals gleichzeitig den gleichen Wert erreichen.

oder: $\underbrace{55}_{>51} \cdot \underbrace{\overbrace{0{,}93}^{>0{,}91}{}^{x}}_{>0{,}91^x} > 51 \cdot 0{,}91^x$ $\qquad x \in \mathbb{R}_0^+$

Die Konzentrationen können folglich niemals gleichzeitig den gleichen Wert erreichen.

B 2.1

> **TIPP** Das Viereck ABCD ist ein Rechteck. Somit gilt:
> $\measuredangle E_nDF_n = \measuredangle ADC - \varphi = 90° - \varphi$

Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck DE_nF_n gilt:

$\measuredangle DF_nE_n = 180° - \measuredangle F_nE_nD - \measuredangle E_nDF_n$

$\measuredangle DF_nE_n = 180° - 90° - (90° - \varphi)$

$\measuredangle DF_nE_n = \varphi$

B 2.2

> **TIPP** Da $|\overline{CF_n}| = |\overline{CD}| - |\overline{DF_n}| = |\overline{AB}| - |\overline{DF_n}|$, benötigt man noch $|\overline{DF_n}|$. Hierzu ermittelt man zunächst $|\overline{DE_n}|$ im rechtwinkligen Dreieck AE_nD, um dann im rechtwinkligen Dreieck DE_nF_n die Streckenlänge $|\overline{DF_n}|$ zu bestimmen.

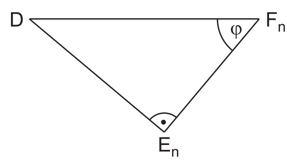
Im rechtwinkligen Dreieck AE_nD gilt:

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DE_n}|} \qquad \left| \cdot \frac{|\overline{DE_n}|}{\cos\varphi} \right.$$

$$|\overline{DE_n}| = \frac{|\overline{AD}|}{\cos\varphi}$$

$$|\overline{DE_n}|(\varphi) = \frac{3}{\cos\varphi}\text{ cm} \qquad \varphi \in [24{,}30°; 65{,}70°]$$

Im rechtwinkligen Dreieck DE_nF_n gilt:



$$\sin\varphi = \frac{|\overline{DE_n}|}{|\overline{DF_n}|} \qquad \left| \cdot \frac{|\overline{DF_n}|}{\sin\varphi} \right.$$

$$|\overline{DF_n}| = \frac{|\overline{DE_n}|}{\sin\varphi} \qquad \text{mit } |\overline{DE_n}|(\varphi) = \frac{3}{\cos\varphi}\text{ cm}$$

$$|\overline{DF_n}|(\varphi) = \frac{\frac{3}{\cos\varphi}}{\sin\varphi}\text{ cm} \qquad \varphi \in [24{,}30°; 65{,}70°]$$

$$|\overline{DF_n}|(\varphi) = \frac{3}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}\text{ cm}$$

Bayern ▪ Realschule ▪ Abschlussprüfung 2023

Mathematik I – Teil A – ohne Taschenrechner

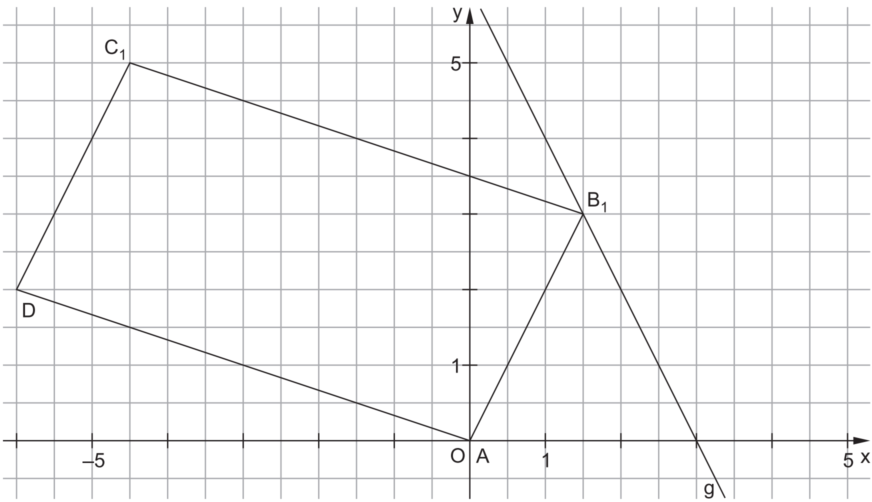
Aufgabe A 1

BE

A 1 Punkte B_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -2x + 6$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -2x+6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $A(0|0)$ spannen zusammen mit Punkten C_n für $x < 3{,}6$ Parallelogramme AB_nC_nD auf.

In das Koordinatensystem sind die Gerade g sowie das Parallelogramm AB_1C_1D für $x = 1{,}5$ eingezeichnet.



Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Parallelogramm AB_1C_1D ein Rechteck ist. 2,5

Aufgabe A 2

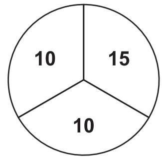
A 2.0 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = 3 \cdot 2^x - 24$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

A 2.1 Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f. 2

A 2.2 Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f an. 1

Aufgabe A 3

A 3.0 Ein Glücksrad besteht aus drei kongruenten Sektoren, die wie abgebildet beschriftet sind.



A 3.1 Lionel dreht dreimal am Glücksrad.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass er dreimal die Zahl 10 erhält. 1

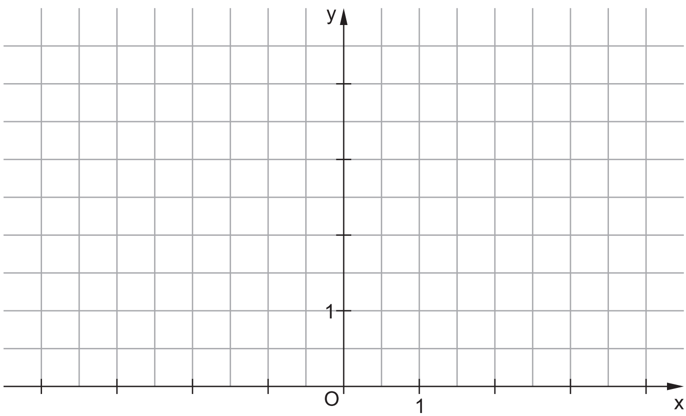
A 3.2 Christiane dreht nur zweimal am Glücksrad.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie zweimal hintereinander die gleiche Zahl erhält. 2

Aufgabe A 4

A 4.0 Der Punkt $P(-3\,|\,1)$ legt zusammen mit Punkten Q_n für $\varphi \in [0°; 180°]$ Pfeile $\overrightarrow{PQ_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2{,}5 + \sin\varphi \\ 3 \end{pmatrix}$ fest.

A 4.1 Zeichnen Sie den Pfeil $\overrightarrow{PQ_1}$ für $\varphi = 0°$ in das Koordinatensystem ein. 1



A 4.2 Für den Pfeil $\overrightarrow{PQ_2}$ gilt: $\overrightarrow{PQ_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von φ. 2

A 1

TIPP Wenn das Parallelogramm AB_1C_1D ein Rechteck wäre, müssten $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufeinander senkrecht stehen. Es müsste also gelten: $\overrightarrow{AB_1} \odot \overrightarrow{AD} = 0$.

Berechnung von $\overrightarrow{AB_1}$ für $x = 1{,}5$:

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \cdot 1{,}5 + 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Überprüfung, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AD}$ zueinander senkrecht sind:

$$\overrightarrow{AB_1} \odot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB_1} \odot \overrightarrow{AD} = 1{,}5 \cdot (-6) + 3 \cdot 2$$

$$\overrightarrow{AB_1} \odot \overrightarrow{AD} = -3 \neq 0$$

Das Parallelogramm AB_1C_1D ist somit kein Rechteck.

A 2.1 Berechnung der Nullstelle der Funktion f:

$$
\begin{array}{lll}
 & 0 = 3 \cdot 2^x - 24 & \mid +24 \qquad x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & 24 = 3 \cdot 2^x & \mid :3 \\
\Leftrightarrow & 8 = 2^x & \\
\Leftrightarrow & x = 3 &
\end{array}
$$

$\mathbb{L} = \{3\}$

A 2.2 Gleichung der Asymptote: $y = -24$

A 3.1

TIPP Die drei Sektoren sind gleich groß, somit ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Sektor $\frac{1}{3}$.
Da die „10“ in zwei Sektoren vorkommt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „10“ $\frac{2}{3}$.
Die „15“ kommt nur in einem Sektor vor, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „15“ beträgt somit $\frac{1}{3}$.

$$P(10\ 10\ 10) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$