

2025 Training

Abschlussprüfung

**MEHR
ERFAHREN**

Realschule Bayern

Mathematik I

- + *Basiswissen mit Übungen*
- + *Aufgaben im Stil der Prüfung*

STARK

Inhalt

Vorwort

Hinweise zur Prüfung und des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus

Training Grundwissen

1 Grundwissen 9. Klasse

1.1	Lineare Gleichungssysteme	1
	Grafisches Lösungsverfahren	1
	Rechnerische Lösungsverfahren	3
1.2	Reelle Zahlen	6
	Die Quadratwurzel	6
	Irrationale Zahlen	6
	Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}	6
	Rechnen mit Wurzeltermen	7
1.3	Quadratische Funktionen	10
	Die Funktion mit der Gleichung $y=x^2$	10
	Funktionen mit Gleichungen der Form $y=a \cdot x^2$ (▶)	10
	Die Scheitelform: $y=a \cdot (x-x_S)^2+y_S$ (▶)	12
	Von der Scheitelform zur allgemeinen Form	13
	Von der allgemeinen Form zur Scheitelform	14
	Berechnen von Parabelgleichungen	14
	Extremwerte	16
	Parabelscharen – Bestimmung von Trägergraphen	20
	Parallelverschiebung von Parabeln	22
1.4	Quadratische Gleichungen	24
	Diskriminante und Lösungsformel	25
	Nullstellen von Parabeln (▶)	27
	Schnitt von Parabel und Gerade	28
	Schnitt von Parabel mit Parabel – System quadratischer Gleichungen	30
	Schnitt von Parabel und Parabelschar – Parabeltangente	35
	Wurzelgleichungen	36
1.5	Abbildung durch zentrische Streckung	38
	Strahlensätze (▶)	38
	Schwerpunkt im Dreieck	42
	Zentrische als Skalar-Multiplikation	43
1.6	Rechtwinklige Dreiecke	52
	Der Satz des Pythagoras (▶)	52
	Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras	54
	Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck	56
1.7	Berechnungen am Kreis	60
	Flächeninhalt und Umfang eines Kreises	60
	Kreisteile – Kreissektor und Kreisbogen	61
	Das Kreissegment	63

1.8	Raumgeometrie	64
	Zeichnen von Schrägbildern	64
	Prisma	66
	Pyramide	68
	Zylinder	74
	Kegel	76
	Kugel	80
1.9	Grundbegriffe der Statistik	82
	Spannweite, Modalwert, arithmetisches Mittel, Zentralwert	82
	Kombinatorik – Anzahl der Möglichkeiten	84
	Vertauschungen – Permutationen	84
	Absolute und relative Häufigkeit	85
1.10	Zufallsexperimente	86
	Absolute und relative Häufigkeit bei Zufallsexperimenten	87
	Ergebnis und Ergebnisraum	87
	Ereignis und Gegenereignis	88
	Vierfeldertafel	89
	Laplace-Experimente und Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten	92
	Wahrscheinlichkeit von Ereignis und Gegenereignis	94
	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	94
2	Grundwissen 10. Klasse	
2.1	Potenzen und Potenzfunktionen	97
	Potenzgesetze	98
	Potenzfunktionen	100
	Potenzen mit rationalen und reellen Exponenten	107
2.2	Exponential- und Logarithmusfunktionen	113
	Exponentialfunktionen der Form $y = a^x$	113
	Exponentialfunktionen der Form $y = k \cdot a^x$ 	114
	Abbildung durch Parallelverschiebung	115
	Der Logarithmus	116
	Der dekadische Logarithmus	117
	Logarithmen mit beliebiger Basis	118
	Exponentialgleichungen	119
	Die Logarithmensätze	120
	Die Logarithmusfunktion	122
	Logarithmusfunktionen der Form $y = k \cdot \log_a x$	123
	Abbildung durch Parallelverschiebung	124
	Bestimmung von Umkehrfunktionen	125
	Wachstums- und Abklingprozesse	128
2.3	Trigonometrie	135
	Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis	135
	Sinus- und Kosinuswerte negativer Winkelmaße	137
	Die Supplementbeziehungen	138
	Die Komplementbeziehungen	139
	Bestimmung von Winkelmaßen	140

Die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion	142
Steigungswinkel einer Geraden	144
Sinussatz und Kosinussatz	146
Trigonometrische Gleichungen	153
Additionstheoreme des Sinus und Kosinus	157
Trigonometrische Gleichungen – Lösung mit den Additionstheoremen	158
Extremwertbestimmung bei trigonometrischen Termen	159
2.4 Skalarprodukt von Vektoren	164
Skalarprodukt von orthogonalen Vektoren	164
Anwendungen des Skalarprodukts orthogonaler Vektoren	167
Skalarprodukt beliebiger Vektoren	170
Anwendung des Skalarprodukts beliebiger Vektoren	171
2.5 Abbildungen im Koordinatensystem	173
Abbildungsvorschriften mit Vektoren und Matrizen – Matrixschreibweise	173
Achsen Spiegelung an einer Ursprungsgeraden	174
Drehung	178
Parallelverschiebung	184
Abbildung durch zentrische Streckung	186
Verknüpfung von Abbildungen	189
Fixelemente	193
Eigenschaften der Abbildungen im Koordinatensystem	196
2.6 Pfadregeln in Baumdiagrammen	198
Pfad-Multiplikationsregel	198
Pfad-Additionsregel	199
Gleichungen erstellen mithilfe von Baumdiagrammen	202

Aufgaben im Stil der Prüfung

Musterprüfung

Teil A – ohne Taschenrechner	M-1
Teil B – mit Taschenrechner	M-3

Original-Abschlussprüfung

Abschlussprüfung 2023

Teil A – ohne Taschenrechner	2023-1
Teil B – mit Taschenrechner	2023-3

Abschlussprüfung 2024 www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscod vgl. Umschlaginnenseite).



Bei MySTARK findest du:

- **Interaktives Training** zu den wichtigsten Kompetenzbereichen
- **Lernvideos** zu ausgewählten Themen
- **Jahrgang 2024**, sobald dieser zum Download bereit steht



Den Zugangscod findest du auf der **Umschlaginnenseite** vorne im Buch.

Autoren: Markus Hochholzer, Markus Schmidl

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung in Mathematik vorbereiten. Das Buch ist so konzipiert, dass es sich zudem bereits ab Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Schulaufgaben eignet.

Mit dem Buch erhältst du:

► **Grundwissen 9. und 10. Klasse**

In diesen Kapiteln wird der prüfungsrelevante Stoff der 9. und der 10. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Zu jedem Themenbereich findest du zudem vielfältige Aufgaben. Diese eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. bzw. 10. Klasse als auch zur Vorbereitung auf die Abschlussprüfung.

Die Aufgaben mit einem durchgestrichenen Taschenrechnersymbol eignen sich auch zur Bearbeitung ohne Taschenrechner.



Zu einigen Themen gibt es zusätzlich **Lernvideos**. An den entsprechenden Stellen im Buch findest du einen QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann. Eine Zusammenstellung dieser und weiterer Videos ist über den QR-Code rechts sowie über folgenden Link abrufbar:



<https://www.stark-verlag.de/>

Außerdem kannst du die Videos von der Plattform **MySTARK** herunterladen.

► **Aufgaben im Stil der neuen Prüfung seit 2023**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bepunktet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.

► **Original-Abschlussprüfungen 2023 und 2024**

Die Abschlussprüfungen dienen dazu, unter Prüfungsbedingungen anhand echter Abschlussprüfungen zu üben. Versuche jeweils, eine Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

Zu allen Aufgaben der einzelnen Kapitel gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Lösungsbuch (Bestell-Nr. J0910TL)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden, und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen!

Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

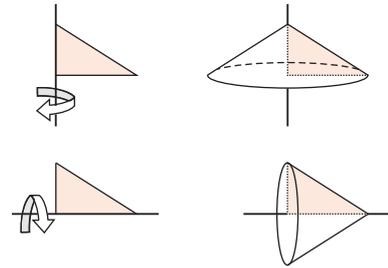
Viel Erfolg in der Prüfung!

Markus Hochholzer

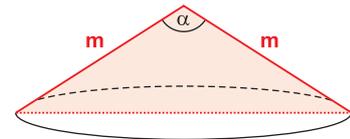
Markus Schmidl

Kegel

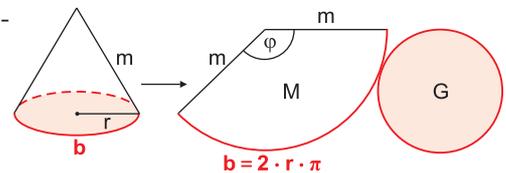
Ein **Kegel** (genauer: Kreiskegel) entsteht, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner beiden Katheten rotiert.



Der Axialschnitt eines Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck. Dessen gleich lange Schenkel werden als **Mantellinien m** bezeichnet. Sie schließen den sogenannten **Öffnungswinkel α** an der Spitze des Kegels ein.



Die Abwicklung der Mantelfläche eines Kreiskegels ist ein **Kreisbogen** mit **Mittelpunktswinkel φ** . Der Radius dieses Sektors ist die Mantellinie m des Kegels. Die Länge des Kreisbogens b entspricht dem Umfang u des Grundkreises. Die Mantelfläche M des Kegels entspricht der Fläche des Kreissektors.



Merke

Eigenschaften von Kegeln

- Die Höhe h eines Kegels ist der Abstand der Spitze S von der Grundfläche.
- Die Abwicklung der **Mantelfläche M** ist ein Kreisbogen.
- Die **Oberfläche O** besteht aus der Mantelfläche und dem Grundkreis.

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Mantelfläche: $A_M = \frac{1}{2} \cdot b \cdot m$ oder: $A_M = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot m^2 \cdot \pi$

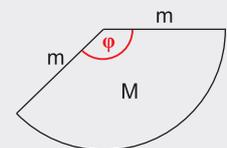
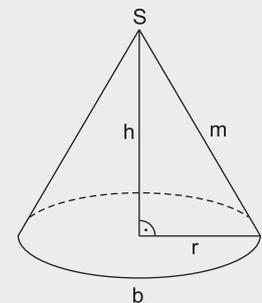
$$A_M = r \cdot \pi \cdot m$$

Oberfläche: $A_O = A_M + A_G$

$$A_O = r \cdot \pi \cdot (m + r)$$

Mittelpunktswinkel φ der Abwicklung der Mantelfläche:

$$\varphi = \frac{r}{m} \cdot 360^\circ$$



Beispiel

Berechne das Volumen, die Mantelfläche und den Mittelpunktswinkel φ der abgewinkelten Mantelfläche für einen Kegel mit den Maßen $r=5\text{ cm}$ und $h=8\text{ cm}$.

Lösung:

Berechnung des Volumens:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (5\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 8\text{ cm}$$

$$V = 209,44\text{ cm}^3$$

Berechnung der Mantelfläche:

$$A_M = r \cdot \pi \cdot m$$

$$A_M = 5\text{ cm} \cdot \pi \cdot \sqrt{(5\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2}$$

$$A_M = 5 \cdot \pi \cdot 9,43\text{ cm}^2$$

$$A_M = 148,13\text{ cm}^2$$

Berechnung des Mittelpunktswinkels:

$$A_M = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot m^2 \cdot \pi \quad \left| \cdot \frac{360^\circ}{m^2 \cdot \pi} \right.$$

$$\varphi = \frac{M \cdot 360^\circ}{m^2 \cdot \pi}$$

$$\varphi = \frac{148,13\text{ cm}^2 \cdot 360^\circ}{(9,43\text{ cm})^2 \cdot \pi}$$

$$\varphi = 190,89^\circ$$

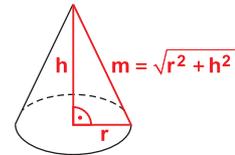
oder:

$$\varphi = \frac{r}{m} \cdot 360^\circ$$

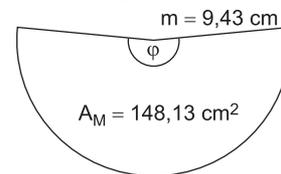
$$\varphi = \frac{5\text{ cm}}{9,43\text{ cm}} \cdot 360^\circ$$

$$\varphi = 190,88^\circ$$

Berechnung der Mantellinie m mit dem Satz des Pythagoras



Abwicklung der Mantelfläche:



Aufgaben



95

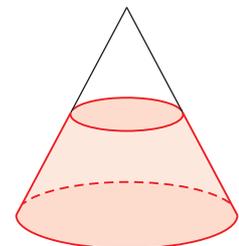
Ein Kegel hat die Mantellinie $m=5\text{ cm}$ und den Radius $r=2,5\text{ cm}$.

- Zeige, dass die Abwicklung der Mantelfläche ein Halbkreis ist.
- Zeige allgemein, dass die Mantelfläche immer ein Halbkreis ist, wenn der Axialschnitt ein gleichseitiges Dreieck ergibt.

96

Ein Kegel mit Radius $r=5\text{ cm}$ und Höhe $h=8\text{ cm}$ wird von einer zur Grundfläche parallelen Ebene in einem Abstand von 3 cm geschnitten. Dabei entsteht ein 3 cm hoher Kegelstumpf.

Berechne Volumen und Mantelfläche des entstandenen Kegelstumpfes.



Tipp

➤ Differenz zweier Kegel

Funktionale Abhängigkeiten und Extremwertberechnungen – Schnitt durch einen Kegel

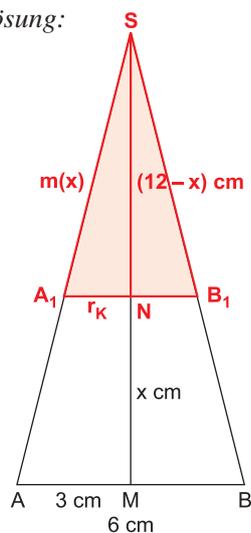
Beispiel

Ein Kegel hat einen Radius von 3 cm und eine Höhe von 12 cm. Dieser Kegel wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in einem Abstand von x cm zum Mittelpunkt M der Grundfläche geschnitten. Die Schnittfläche ist ein Kreis mit Radius r_K . Mit der Spitze S bildet dieser Kreis wieder neue Kegel mit dem Axialschnitt A_1B_1S .

- Zeichne den Axialschnitt A_1B_1S des Kegels für $x=5$ cm.
- Berechne den Radius r_K der abgeschnittenen Kegel in Abhängigkeit von x .
- Berechne die Mantelfläche der abgeschnittenen Kegel in Abhängigkeit von x .
- Berechne den x -Wert, für den die Mantelfläche des abgeschnittenen Kegels 2π cm² beträgt.

Lösung:

a)



(Zeichnung im Maßstab 1:2)

b) Strahlensatz mit Zentrum S :

$$\frac{r_K}{|AM|} = \frac{|SN|}{|SM|} \quad | \cdot |AM|$$

$$r_K = \frac{|SN|}{|SM|} \cdot |AM|$$

$$r_K(x) = \frac{(12-x) \text{ cm}}{12 \text{ cm}} \cdot 3 \text{ cm}$$

$$r_K(x) = \frac{(12-x)}{4} \text{ cm}$$

$$r_K(x) = \left(3 - \frac{1}{4}x\right) \text{ cm}$$

c) Bestimme zunächst die Mantellinie $|\overline{SA_n}| = m(x)$.

Strahlensatz mit Zentrum S :

$$\frac{m}{|\overline{SA}|} = \frac{|SN|}{|SM|} \quad | \cdot |\overline{SA}|$$

$$m = \frac{|SN|}{|SM|} \cdot |\overline{SA}|$$

$$m(x) = \frac{(12-x) \text{ cm}}{12 \text{ cm}} \cdot |\overline{SA}|$$

Bestimme $|\overline{SA}|$ im rechtwinkligen Dreieck AMS .

$$m(x) = \frac{12-x}{12} \cdot \sqrt{|\overline{AM}|^2 + |\overline{MS}|^2}$$

$$m(x) = \left(1 - \frac{1}{12}x\right) \cdot \sqrt{3^2 + 12^2} \text{ cm}$$

$$m(x) = (12,37 - 1,03x) \text{ cm}$$

Mantelfläche der abgeschnittenen Kegel:

$$A_M = r_K(x) \cdot \pi \cdot m(x)$$

$$A_M(x) = \left(3 - \frac{1}{4}x\right) \cdot \pi \cdot (12,37 - 1,03x) \text{ cm}^2$$

$$A_M(x) = (37,11 - 3,09x - 3,09x + 0,26x^2) \cdot \pi \text{ cm}^2$$

$$A_M(x) = (0,26x^2 - 6,18x + 37,11) \cdot \pi \text{ cm}^2$$

$$d) \begin{cases} A_M(x) = (0,26x^2 - 6,18x + 37,11) \cdot \pi \text{ cm}^2 \\ \wedge \\ A_M = 2\pi \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0,26x^2 - 6,18x + 37,11) \cdot \pi = 2\pi \quad (I = II) \quad | : \pi \quad \pi \text{ lässt sich durch Division beseitigen.}$$

$$\Leftrightarrow 0,26x^2 - 6,18x + 37,11 = 2 \quad | -2$$

$$\Leftrightarrow 0,26x^2 - 6,18x + 35,11 = 0$$

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung

$$D = (-6,18)^2 - 4 \cdot 0,26 \cdot 35,11 = 1,678$$

Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{6,18 \pm \sqrt{1,678}}{2 \cdot 0,26}$$

x_1 ist keine Lösung, da der Kegel nur 12 cm hoch ist und er daher im Abstand von 14,38 cm von der Grundfläche nicht von einer Ebene geschnitten werden kann.

$$(x_1 = 14,38) \vee x_2 = 9,39$$

$$L = \{9,39\}$$

Für $x = 9,39$ beträgt die Mantelfläche $2\pi \text{ cm}^2$.

Aufgaben



97

a – d

Einem Kegel mit Radius 4 cm und Höhe 10 cm sind Zylinder mit Radius x cm einbeschrieben.

- Zeichne den Axialschnitt des Kegels und des einbeschriebenen Zylinders für $x=2$ ein.
- Berechne die Höhe der Zylinder in Abhängigkeit von x .
- Berechne die Mantelfläche der Zylinder in Abhängigkeit von x .
- Berechne den x -Wert, für den der Zylinder mit der größten Mantelfläche entsteht.
- Prüfe rechnerisch, ob es einen Zylinder gibt, dessen Mantelfläche halb so groß ist wie die Mantelfläche des Kegels.



98

a – c

Ein Kegel hat eine Höhe von 10 cm. Der Radius beträgt 2 cm. Die Höhe wird um x cm verkürzt und der Radius um x cm verlängert.

- Zeichne den Axialschnitt ABS des Kegels und den Axialschnitt $A_1B_1S_1$ des veränderten Kegels für $x=2$.
- Berechne die Länge der Mantellinie m der veränderten Kegel mit Axialschnitt $A_nB_nS_n$ in Abhängigkeit von x .
- Berechne, für welchen x -Wert man die kürzeste Mantellinie erhält.
- Berechne, für welchen x -Wert die Mantellinie 9 cm lang ist.

Aufgabe A 3

2 Punkte

A 3.0 Die nebenstehende Skizze zeigt das rechtwinklige Dreieck WKR.

Es gilt:

$$|\overline{KR}| = 134 \text{ km};$$

$$\sphericalangle WRK = 60^\circ;$$

$$\sphericalangle RKW = 90^\circ.$$

Die Luftlinie

Würzburg (W) – Rosenheim (R)

wird durch die Strecke \overline{WR} dargestellt.

Berechnen Sie deren Länge.



Abschlussprüfung 2023
Bayern – Realschule – Mathematik I

Teil A – ohne Taschenrechner

Aufgabe A 1

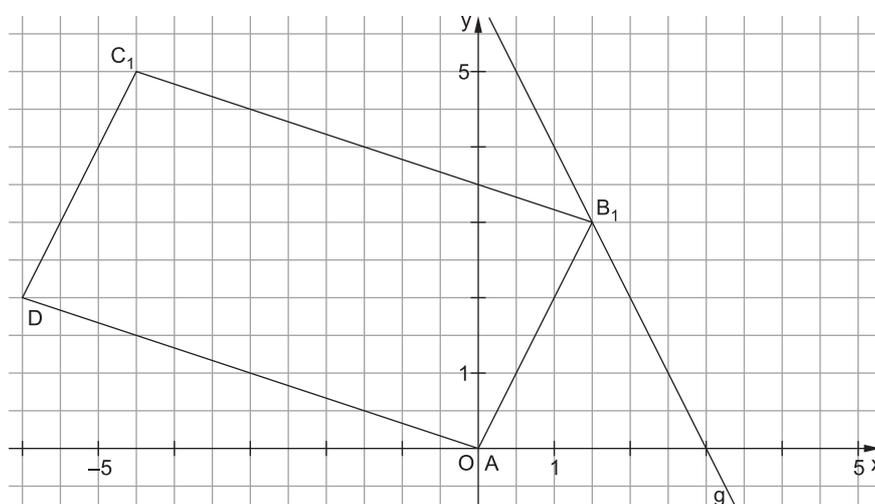
2,5 Punkte

A 1 Punkte B_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -2x + 6$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $A(0|0)$ spannen zusammen mit

Punkten C_n für $x < 3,6$ Parallelogramme AB_nC_nD auf.

In das Koordinatensystem sind die Gerade g sowie das Parallelogramm AB_1C_1D für $x = 1,5$ eingezeichnet.



Aufgabe A 2

A 2.0 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = 3 \cdot 2^x - 24$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

2 Punkte

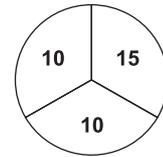
A 2.1 Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f .

1 Punkt

A 2.2 Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.

Aufgabe A 3

A 3.0 Ein Glücksrad besteht aus drei kongruenten Sektoren, die wie abgebildet beschriftet sind.



1 Punkt

A 3.1 Lionel dreht dreimal am Glücksrad.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass er dreimal die Zahl 10 erhält.

2 Punkte

A 3.2 Christiane dreht nur zweimal am Glücksrad.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie zweimal hintereinander die gleiche Zahl erhält.

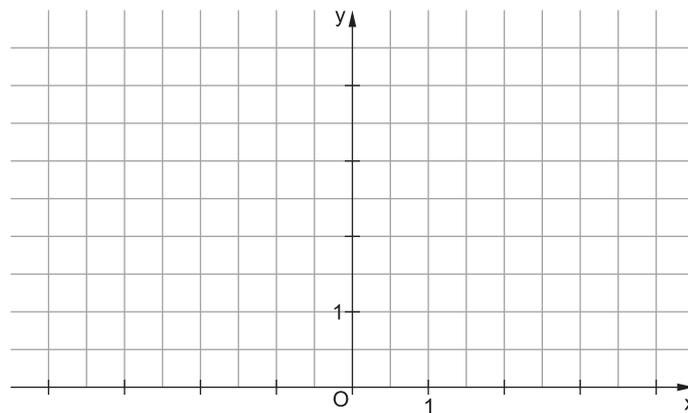
Aufgabe A 4

A 4.0 Der Punkt $P(-3 | 1)$ legt zusammen mit Punkten Q_n für $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$

Pfeile $\overrightarrow{PQ_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2,5 + \sin \varphi \\ 3 \end{pmatrix}$ fest.

1 Punkt

A 4.1 Zeichnen Sie den Pfeil $\overrightarrow{PQ_1}$ für $\varphi = 0^\circ$ in das Koordinatensystem ein.



2 Punkte

A 4.2 Für den Pfeil $\overrightarrow{PQ_2}$ gilt: $\overrightarrow{PQ_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von φ .



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK