2025

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Berlin/Brandenburg

Mathematik L

+ *Online-Glossar*

PDF

STARK

Inhalt

Jahrgang 2023

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MySTARK herunterladen (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite vorne im Buch).

MySTARK: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online auf MySTARK Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf der Umschlaginnenseite vorne in diesem Buch.

Autoren:

Dr. Detlef Launert:
Lösungen zur Abiturprüfung 2020, Aufgabe 1 Analysis, Aufgaben 2.1 und 2.2
Lösungen zur Abiturprüfung 2021
Lösungen zur Abiturprüfung 2022, Aufgaben 1, 2.1 und 2.2
Lösungen zur Abiturprüfung 2024, Aufgabe 1, Aufgaben 2.1 und 2.2

Lauri Lehmann:
Lösungen zur Abiturprüfung 2020, Aufgabe 1 Geometrie und Stochastik, Aufgaben 3.1, 3.2, 4.1 und 4.2
Lösungen zur Abiturprüfung 2022, Aufgaben 3 und 4

Markus Porzelt
Lösungen zur Abiturprüfung 2023
Lösungen zur Abiturprüfung 2024, Aufgaben 3 und 4

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2025** für den **Leistungskurs in Berlin/Brandenburg** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das **Abitur 2025**. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.
- Im zweiten Teil enthält die **Original-Prüfungsaufgaben 2020 bis 2023**. Die **Original-Prüfung 2024** steht Ihnen auf der **Plattform MySTARK** zum Download zur Verfügung. Mit diesen Aufgaben können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Der Zugangscode auf der Umschlaginnenseite vorne in diesem Buch ermöglicht es Ihnen, Aufgaben im Rahmen eines **Online-Prüfungstrainings zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** interaktiv zu lösen.
- Die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.
- Zu allen Original-Prüfungsaufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die es Ihnen ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.
- Zudem finden Sie kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung ab Mitte März 2025 unter www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2025 vom LISUM Berlin-Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls auf der Plattform MySTARK (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2025

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

Die Grundlagen für die von Ihnen zu bearbeitenden Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe in der Ausgabe von 2014 und die Bildungsstandards der KMK für die allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den im oben genannten Rahmenlehrplan beschriebenen bzw. aufgelisteten abschlussorientierten Standards.

Prüfungsrelevante Themen

Die Prüfungsaufgaben im Fach Mathematik basieren auf dem **Kerncurriculum**.
Grundsätzlich **nicht** gefordert werden das Erläutern und Entwickeln von Beweisen sowie Simulationen.

Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben

Im Prüfungsteil A, den hilfsmittelfreien Aufgaben, stehen die Aufgaben und ihre Teilaufgaben in keinem übergeordneten Zusammenhang. Zumeist handelt es sich um kurze Aufgabenstellungen. Der Prüfungsteil A besteht aus zwei Aufgabengruppen.
Aufgabengruppe 1 besteht aus 4 Aufgaben, von denen alle verpflichtend bearbeitet werden müssen und Aufgabengruppe 2 besteht aus 6 Aufgaben, von denen 2 Aufgaben bearbeitet werden müssen.
Aufgabengruppe 1 beinhaltet Aufgaben, die den Anforderungsbereichen I und II entsprechen, Aufgabengruppe 2 beinhaltet mindestens eine Teilaufgabe mit Anforderungsbereich III.

Im Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) ist jede Aufgabenstellung als strukturierte, inhaltlich zusammenhängende Aufgabe konstruiert, die in mehrere Teilaufgaben untergliedert ist. Jede dieser Aufgaben enthält entsprechende Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen. Üblicherweise beginnen die Aufgaben mit den dem Anforderungsbereich I zugeordneten Grundaufgaben. Es empfiehlt sich immer, die Aufgabe zunächst vollständig zu lesen, da Zwischenergebnisse gelegentlich auch in nachfolgenden Aufgabenteilen enthalten sein können.

Die Wahlmöglichkeiten sind in folgender Tabelle dargestellt:

Prüfungsteil A Aufgabengruppe 1	**hilfsmittelfrei** 4 Aufgaben verpflichtend ohne Wahlmöglichkeit
Prüfungsteil A Aufgabengruppe 2	**hilfsmittelfrei** 6 Aufgaben, von denen 2 ausgewählt werden müssen
Prüfungsteil B	**mit Hilfsmitteln** mindestens eine Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis und mindestens eine Aufgabenstellung aus dem Bereich Analytische Geometrie und Stochastik verpflichtende und wählbare Aufgabenstellungen möglich, genauere Angaben waren bei Drucklegung nicht bekannt

Für die Bearbeitung der vier Prüfungsaufgaben stehen **330 Minuten** zur Verfügung. Davon können maximal 100 Minuten für den Prüfungsteil A verwendet werden. 30 Minuten sind zudem als Lesezeit vorgesehen, in denen die Aufgaben gelesen werden können und eine Wahl zwischen den beiden Aufgaben in jedem Themengebiet getroffen werden kann.

2023, 2022 und **2021** galten aufgrund der Coronapandemie **Ausnahmeregelungen**. Der hilfsmittelfreie Teil bestand aus 4 **verpflichtenden** Aufgaben Analysis und die Lehrkraft wählte **zusätzlich** entweder 2 Aufgaben Analytische Geometrie **oder** 2 Aufgaben Stochastik aus.
Im nicht hilfsmittelfreien Teil mussten beide Aufgaben Analysis bearbeitet werden und die Lehrkraft wählte wiederum **zusätzlich** die Aufgabe Analytische Geometrie **oder** die Aufgabe Stochastik aus.
Die Bewertungseinheiten und Aufgabenstellungen wurden entsprechend angepasst.

Für die Frage, welche **Hilfsmittel** bei der Prüfung zugelassen sind, ist entscheidend, ob die Abiturprüfung ohne oder mit Verwendung eines Computer-Algebra-Systems (CAS) bearbeitet wird.
Grundsätzlich sind folgende Hilfsmittel zugelassen:
- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen und an der Schule eingeführt ist (Aufgabenstellung 2, 3 und 4).

Für die Bearbeitung **ohne CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:
Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.

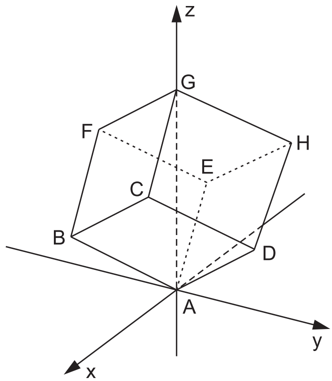
Für die Bearbeitung **mit CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:
Für die Bearbeitung der Abiturprüfung können ein PC oder folgende Geräte Anwendung finden:

Texas Instruments	TI-92, TI-Voyage, TI-Nspire
Casio	Classpad

Ein PC-gestütztes CAS-Abitur kann mit CAS-Software wie MuPad, Geogebra oder Derive oder mit Emulationen von o.g. CAS-Geräten durchgeführt werden.

Würfel BE

Betrachtet wird der abgebildete Würfel mit $A(0|0|0)$, $B(3|-3|3)$, $G(0|0|9)$ und $H(-3|3|6)$.



a) Berechnen Sie das Volumen des Würfels. 2

b) Begründen Sie, dass das Viereck ABGH ein Rechteck ist, und zeichnen Sie dieses in die Abbildung ein. 3

c) Das Viereck ABGH liegt in der Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Parameterform und Koordinatenform. [Kontrollergebnis: $x+y=0$] 5

d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Ebene L mit der xz-Ebene einschließt. 2

e) Ermitteln Sie die Koordinaten von F. 5

f) Die Ebene, die durch die Mittelpunkte der Kanten $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{AD}$ und $\overline{DH}$ verläuft, teilt den Würfel in zwei Teilkörper.
Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass das Volumen des kleineren Teilkörpers ein Achtel des Volumens des Würfels ist. 5

g) Gegeben ist die Schar der Ebenen $z=k$ mit $k \in \mathbb{R}$.
Geben Sie in Abhängigkeit von k die unterschiedlichen Arten der Figuren an, in denen die Ebenen für $0<k<9$ den Würfel schneiden. 3

25

Lösungen zu Aufgabe 3.2

a) Das Volumen V eines Würfels mit der Kantenlänge a berechnet man mit der Formel:

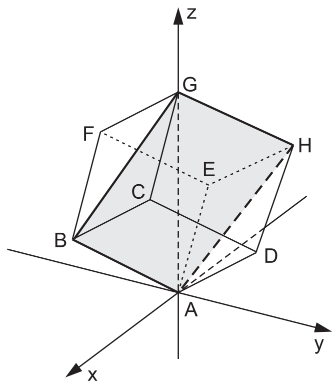
$$V = a^3$$

Für das Volumen des zu betrachtenden Würfels gilt:

$$V = |\overline{AB}|^3 = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right|^3 = (\sqrt{3^2+(-3)^2+3^2})^3 = (\sqrt{3\cdot 3^2})^3 = (3\cdot\sqrt{3})^3 = 81\cdot\sqrt{3}\ [\text{VE}]$$

Das Volumen des Würfels beträgt $\underline{\underline{81\cdot\sqrt{3}\ \text{VE}}}$.

b) Die Seite $\overline{BG}$ liegt in der Seitenfläche BCGF und steht folglich senkrecht auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{GH}$. Ebenso liegt die Seite $\overline{AH}$ in der Seitenfläche ADHE und steht folglich senkrecht auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{GH}$.
Alle Innenwinkel des Vierecks ABGH sind demnach rechtwinklig.



Alternativ kann gezeigt werden, dass die im Viereck ABGH jeweils gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind. Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{GH}$ sind gleich lang, da es sich um Kanten des Würfels handelt. Die Seiten $\overline{BG}$ und $\overline{AH}$ sind gleich lang, da es sich um Seitendiagonalen des Würfels handelt.

Die volle Punktzahl wird erreicht, wenn man für alle vier Innenwinkel zeigt, dass sie 90° groß sind, oder wenn man dies für mindestens einen Innenwinkel zeigt und dann eine Begründung dafür gibt, dass die jeweils gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind.

c) Eine Gleichung der Ebene L in Parameterform mit dem Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ und den Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AG}$ lautet:

$$L:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}$$

Da der Punkt A im Ursprung liegt, kann der Stützvektor entfallen.

Als weiterer Spannvektor kann auch der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ oder der dazu kollineare Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ benutzt werden.

Die obige Gleichung der Ebene L in Parameterform kann vereinfacht werden, indem man die Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AG}$ durch kollineare Vektoren ersetzt:

$$\underline{\underline{L:\ \vec{x} = s'\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t'\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s', t' \in \mathbb{R}}}$$

Durch die Bildung des Kreuz- bzw. Vektorprodukts der beiden Spannvektoren erhält man einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene L:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Aus einer Ebenengleichung in Normalenform erhält man durch Ausmultiplizieren eine Ebenengleichung in Koordinatenform:

$$\text{L:}\ \ \vec{n}\circ\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\overrightarrow{OA}\right]=0$$

$$\text{L:}\ \ \vec{n}\circ\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=0$$

$$\underline{\underline{\text{L:}\ \ x+y=0}}$$

d) Da die Punkte A und G auf der z-Achse liegen, enthält die Ebene L die z-Achse. Wie man den Ebenengleichungen in Parameter-, Normalen- und Koordinatenform entnehmen kann, enthält die Ebene zudem die senkrecht zur z-Achse verlaufende Gerade, die den von der positiven x-Achse und der negativen y-Achse eingeschlossenen Winkel halbiert.

Die Ebene L schließt folglich mit der xz-Ebene einen Winkel von $\underline{\underline{45°}}$ ein.

Alternativ lässt sich folgendermaßen rechnen:
Da der Winkel α zwischen der Ebene L und der xz-Ebene gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{n}_{xz}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ der beiden Ebenen ist, gilt:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\underline{\underline{45°}}$$

e) Mithilfe der Koordinaten der Punkte B und G lässt sich der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{BG}$ bestimmen:

$$M\left(\frac{x_B+x_G}{2}\,\middle|\,\frac{y_B+y_G}{2}\,\middle|\,\frac{z_B+z_G}{2}\right)=M\left(\frac{3+0}{2}\,\middle|\,\frac{-3+0}{2}\,\middle|\,\frac{3+9}{2}\right)=M(1{,}5\,|\,-1{,}5\,|\,6)$$

Da sich die Diagonalen einer Würfelseitenfläche senkrecht schneiden, steht die Strecke $\overline{CF}$ senkrecht zur Strecke $\overline{BG}$ und folglich auch zur Ebene L. Ein zur Ebene L senkrechter Vektor ist der in Teilaufgabe c bestimmte Normalenvektor:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Der Einheitsvektor zum Normalenvektor $\vec{n}$ ist:

$$\vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

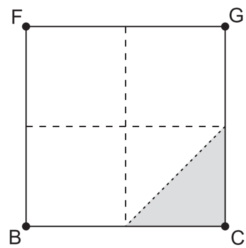
Da sich die Diagonalen einer Würfelseitenfläche halbieren, ist der Abstand der Punkte F und M halb so groß wie die Länge der Strecke $\overline{BG}$.
Für den Ortsvektor $\overrightarrow{OF}$ zum Punkt F gilt folglich:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{FM} \\
&= \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BG}\right| \cdot \vec{n}_0 \\
&= \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BG}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 6^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes F lauten $\underline{\underline{F\left(1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \;\middle|\; -1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \;\middle|\; 6\right)}}$.

f) Die Skizze zeigt die quadratische Seitenfläche BCGF des Würfels. Entsprechend könnte auch die Seitenfläche ADHE skizziert werden. Bei dem kleineren Teilkörper handelt es sich um ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche. Diese Grundfläche ist eine Teilfläche der Seitenfläche BCGF (siehe grau markierte Fläche in der Skizze). Der Inhalt dieser Teilfläche ist ein Achtel des Inhalts der Seitenfläche BCGF. Denn durch vergleichbare Schnitte ließe sich die Seitenfläche BCGF in acht kongruente Dreiecke teilen.
Die Höhe des Teilkörpers stimmt mit der Kantenlänge des Würfels überein. Da sich das Volumen sowohl des Würfels als auch des Teilkörpers aus dem Produkt von Grundfläche und Höhe ergibt, ist bei einem Achtel der Grundfläche und gleicher Höhe auch das Volumen des Teilkörpers ein Achtel des Volumens des Würfels.

Skizze:



g) Für $0 < k \leq 3$ und $6 \leq k < 9$ ist die jeweilige Schnittfigur ein Dreieck, für $3 < k < 6$ ein Sechseck.

Anmerkung:
Um sich den Sachverhalt vor Augen führen zu können, ist ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen nötig. Entscheidend für die Angabe der richtigen Lösung ist, zu erkennen, dass es jeweils drei Eckpunkte mit der z-Koordinate 3 (nämlich B, D und E) und mit der z-Koordinate 6 (nämlich C, F und H) gibt.