2025

Zentrale P

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium Brandenb

Mathematik 1

STARK

Inhalt

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2024 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Jeweils im Herbst erscheinen die neuen Ausgaben der Zentralen Prüfung mit Lösungen.

Autoren der Lösungen:

Jürgen Gurok: Lösungen zu den Prüfungsaufgaben 2018, 2020, 2022, 2024
Dr. Detlef Launert: Lösungen zu den Prüfungsaufgaben 2017, 2019, 2021, 2023

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

zum Abschluss der 10. Klasse sind Sie verpflichtet, an den **Zentralen Prüfungen am Ende der Jahrgangsstufe 10** teilzunehmen. Das vorliegende Übungsbuch bereitet Sie **optimal auf die Prüfung im Fach Mathematik** vor. Alle für die Prüfung relevanten mathematischen Inhalte können mit den in diesem Buch enthaltenen originalen Prüfungsaufgaben eingeübt und gefestigt werden. Zu diesem Zweck hält das Buch für Sie bereit:

– Zu allen Aufgaben **vollständige, ausführlich kommentierte Lösungen**

– Hilfreiche **Hinweise und Tipps**

– Ausführliches **Stichwortverzeichnis** zum schnellen Auffinden aller wichtigen Fachbegriffe und zur Unterstützung bei der gezielten thematischen Erarbeitung des Prüfungsstoffs

Die Hinweise und Tipps direkt vor den Lösungen einer Aufgabe sollen Ihnen „auf den richtigen Weg" verhelfen, wenn Sie einmal Probleme mit dem Lösen einer Aufgabe haben. Sie sind ebenso wie zusätzliche Hinweise und Erklärungen in den Lösungen durch **graue Symbole** am Seitenrand gekennzeichnet. Sie sollten aber nur dann auf diese Hinweise zurückgreifen, wenn Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben nicht gelingen sollte.

Den genauen Aufbau der Prüfung 2025 können Sie den Hinweisen zur Zentralen Prüfung auf den Seiten I bis VII entnehmen.

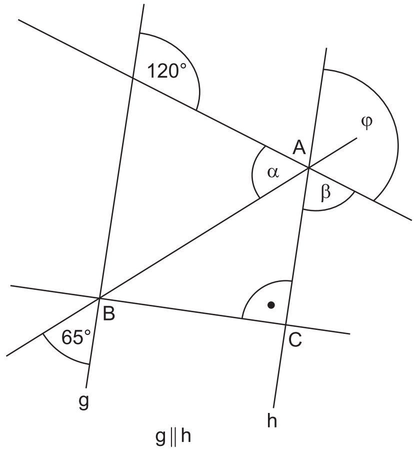
Sollten nach Erscheinen dieses Bandes wichtige Änderungen in der Zentralen Prüfung 2025 vom Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu unter www.stark-verlag.de/mystark (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Die Autoren dieses Buches wünschen Ihnen sowohl für die Vorbereitung als auch für die Prüfung viel Erfolg!

Zentrale Prüfung 2020 in Mathematik
am Ende der 10. Jahrgangsstufe – Gymnasium Brandenburg

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Aufgabe 1 BE



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

1.1 Für das rechtwinklige Dreieck ABC in der Abbildung oben gilt:
$\left|\overline{BC}\right| = 6\text{ cm}$ und $\left|\overline{AC}\right| = 8\text{ cm}$

Ermitteln Sie die Länge der Hypotenuse des Dreiecks ABC. 2

1.2 Geben Sie die Größen der Winkel α, β und φ an. 3

5

Aufgabe 2

2.1 Die Punkte $P_1(x_1|23)$ und $P_2(x_2|23)$ liegen auf dem Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2$.

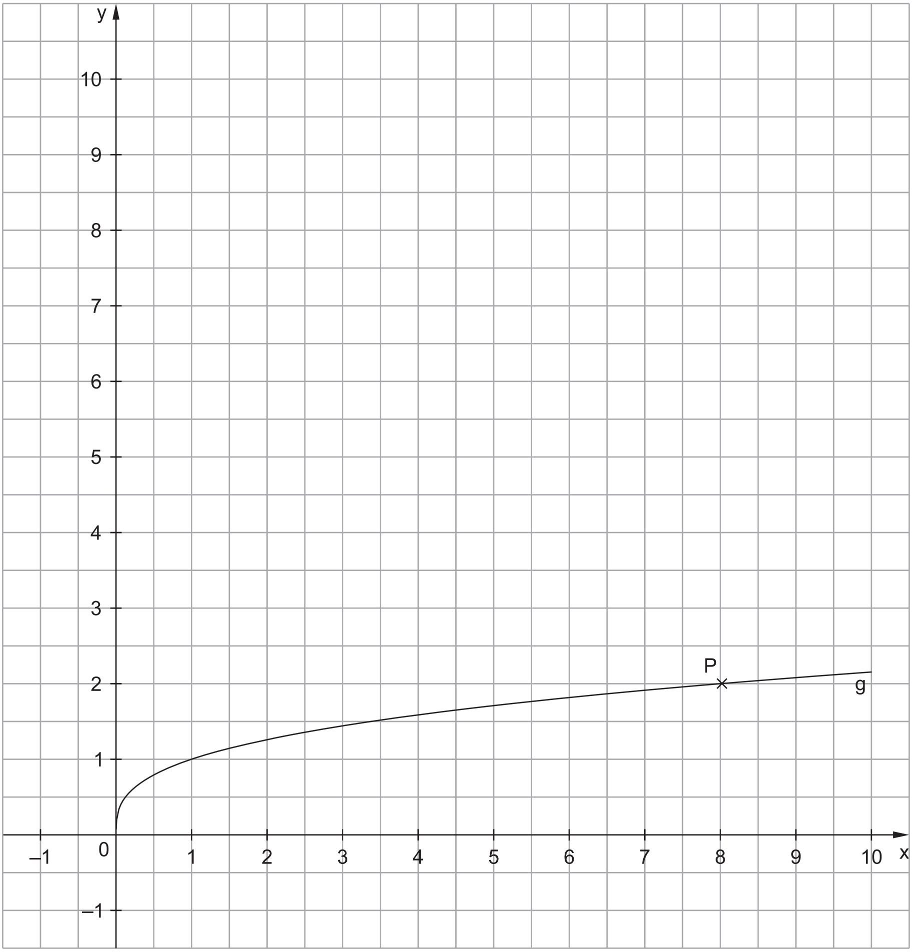
Geben Sie die Werte für x_1 und x_2 an. 2

2.2 Begründen Sie, dass die Graphen der Funktionen f und h mit $f(x) = x^2 - 2$ und $h(x) = -x^2 - 3$ keine gemeinsamen Schnittpunkte besitzen. 3

5

Aufgabe 3: Funktionen

Gegeben ist der Graph einer Funktion g der Form $g(x) = \sqrt[n]{x}$.
Der Punkt $P(8\,|\,2)$ liegt auf dem Graphen g.



a) Ermitteln Sie n und geben Sie die Funktionsgleichung von g an. 3

Lösung

1.1 Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die gegebenen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ Katheten. Gesucht ist die Hypotenusenlänge – ein Fall für den Satz des Pythagoras:

$|\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2$

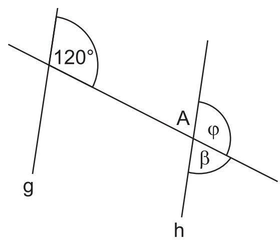
Einsetzen der gegebenen Kathetenlängen ergibt:

$|\overline{AB}|^2 = 6^2\ \text{cm}^2 + 8^2\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2 + 64\ \text{cm}^2 = 100\ \text{cm}^2$

Wurzel ziehen:

$\underline{\underline{|\overline{AB}| = 10\ \text{cm}}}$

1.2 Hier gilt es, zunächst die Struktur der gegebenen Figur zu erkennen und dann die zugehörigen Winkelarten. Die Parallelen g und h werden von drei weiteren Geraden geschnitten.

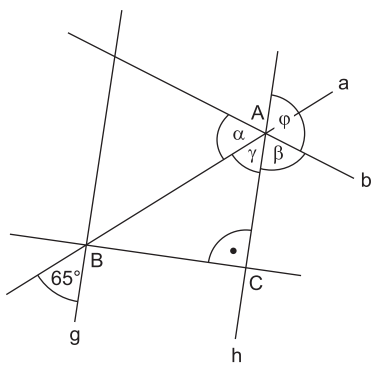


Bestimmen von φ:
Die Parallelen g und h werden von der oberen Geraden (durch den Punkt A) geschnitten.
Man erkennt zunächst, dass der gegebene Winkel der Größe 120° und der gesuchte Winkel φ Stufenwinkel bilden, die an geschnittenen Parallelen je gleich groß sind.
Deshalb ist $\varphi = 120°$ das erste Ergebnis.

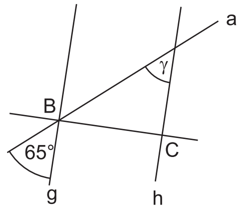
Bestimmen von β:
Der Winkel β ist zu φ ein Nebenwinkel, beide zusammen ergeben einen gestreckten Winkel (was in der Zeichnung auch erkennbar ist), also $\beta + \varphi = 180°$.
Da $\varphi = 120°$ ist, muss dann $\beta = 60°$ sein, unser zweites Ergebnis.

Bestimmen von α:
Hierfür gibt es verschiedene Wege. Es sollen zwei dargestellt werden.

1. Möglichkeit:
Zur Beschreibung der Figur werden weitere Geraden und Winkel bezeichnet:
- Geraden a und b (schneiden die Parallelen g und h)
- Winkel γ



Nun ist zu sehen, dass der Winkel γ und der gegebene Winkel von 65° zueinander Stufenwinkel an den geschnittenen Parallelen g und h sind.
Somit haben beide dieselbe Größe, also $\gamma = 65°$.



Da α, β und γ an der Geraden b liegen und zusammen einen gestreckten Winkel bilden, gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Bekannt sind $\beta = 60°$ und $\gamma = 65°$, dann wird eingesetzt:

$$\alpha + 60° + 65° = 180°$$
$$\alpha = 180° - 60° - 65°$$
$$\alpha = 55°$$

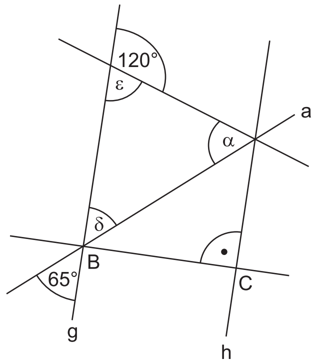
2. Möglichkeit: Bezeichnung der Winkel δ und ε
Der Winkel δ ist zum 65°-Winkel ein Scheitelwinkel und hat somit auch die Größe 65°.

Der Winkel ε ist zu 120° ein Nebenwinkel. Somit gilt $\varepsilon = 60°$, da die Summe zweier Nebenwinkel zusammen 180° ergibt.

Jetzt ist zu erkennen, dass α, δ und ε Innenwinkel eines Dreiecks sind und somit zusammen 180° ergeben: $\alpha + \delta + \varepsilon = 180°$

Einsetzen:

$$\alpha + 65° + 60° = 180°$$
$$\alpha = 55°$$



Zusammenfassung der Ergebnisse: $\underline{\underline{\alpha = 55°;\ \beta = 60°;\ \varphi = 120°}}$

2.1 Von zwei Punkten P_1 und P_2 sind die Funktionswerte (also die y-Werte) gegeben und die Argumente (also die x-Werte) gesucht. Man setzt die y-Werte in die gegebene Funktionsgleichung ein und löst die entstehende Gleichung nach x auf.

Beachten Sie dabei, dass es zwei Lösungen gibt, da $\sqrt{x^2} = |x|$. Ein beliebter Fehler ist es, die Betragsstriche zu ignorieren, was dann nur zu einer Lösung führt.

$$f(x) = y = x^2 - 2$$
$$23 = x^2 - 2 \quad \Big| +2$$
$$25 = x^2 \quad \Big| \sqrt{}$$
$$5 = |x|$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 5;\ x_2 = -5$

Ergebnis: $\underline{\underline{P_1(5\,|\,23);\ P_2(-5\,|\,23)}}$

2.2 Auch hier gibt es zur Lösung verschiedene mögliche Vorgehensweisen.

1. Möglichkeit:

Um Schnittpunkte zweier Graphen zu bestimmen, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt. Ist die entstehende Gleichung nicht lösbar, kann es auch keine gemeinsamen Punkte geben.

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) & \\ x^2 - 2 &= -x^2 - 3 & \quad &\mid +2 \\ x^2 &= -x^2 - 1 & &\mid +x^2 \\ 2x^2 &= -1 & \end{aligned}$$

Man erkennt schon: Die linke Seite dieser Gleichung ist positiv, da x^2 immer ≥ 0, die rechte Seite ist aber negativ. Also hat die Gleichung keine Lösungen. Wer das nicht erkennt, rechnet weiter.

$$\begin{aligned} 2x^2 &= -1 & \quad &\mid :2 \\ x^2 &= -\frac{1}{2} & &\mid \sqrt{} \\ |x| &= \sqrt{-\frac{1}{2}} & \end{aligned}$$

Das ist nicht möglich, da sich im Bereich der reellen Zahlen aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen lässt.

Ergebnis: Die beiden Graphen besitzen $\underline{\underline{\text{keine gemeinsamen Punkte}}}$.

2. Möglichkeit:

Man untersucht die Lage der Graphen im Koordinatensystem, um zu erkennen, dass sich beide Graphen nicht schneiden. Hilfreich ist es, die Graphen zu skizzieren (Freihandskizze genügt).

Ausgangspunkt ist der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$.

Der Graph von $f(x) = x^2 - 2$ geht aus dem Graphen von $y = x^2$ durch Verschiebung um 2 LE in negative y-Richtung hervor.

Analysieren des Graphen der Funktion h:

$h(x) = -x^2 - 3$

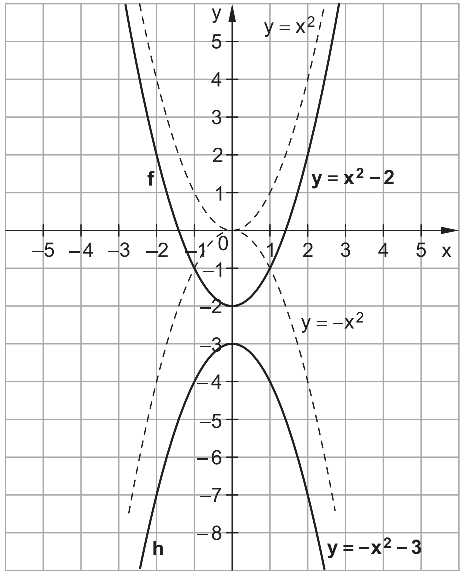
Der Summand –3 weist auf eine Verschiebung des Graphen von $y = x^2$ in y-Richtung hin, das negative Vorzeichen vor x^2 ergibt eine Spiegelung an der x-Achse.

Wichtig ist es aber, die richtige Reihenfolge der beiden Abbildungen zu finden. Diese ergibt sich aus der Reihenfolge der auszuführenden Rechenoperationen, wenn man ein Argument x einsetzt, um den Funktionswert zu berechnen:

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ist zuerst zu} \\ \text{berücksichtigen}}}{-x^2} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ist dann die} \\ \text{zweite Abbildung}}}{3}$$

Ausgangsgraph:	$y = x^2$
Spiegelung an der x-Achse:	$y = -x^2$
Verschiebung in y-Richtung:	$y = -x^2 - 3$

Skizziert man die Graphen in ein Koordinatensystem, so erkennt man, dass sich die Graphen von f und h $\underline{\underline{\text{nicht schneiden}}}$.



3. Möglichkeit:
Man kann auch folgendermaßen argumentieren:

Graph von f: Scheitelpunkt $(0\,|\,{-2})$, da Verschiebung von $y = x^2$ um 2 LE nach unten; nach oben geöffnet

Graph von h: Scheitelpunkt $(0\,|\,{-3})$, da Verschiebung um 3 LE nach unten; nach unten geöffnet wegen $-x^2$

Damit ergibt sich, dass es $\underline{\underline{\text{keinen Schnittpunkt}}}$ geben kann.

3. a) $g(x) = \sqrt[n]{x}$

P$(8\,|\,2)$ liegt auf dem Graphen von g, d. h., man setzt die Koordinaten von P in die Funktionsgleichung ein:

$2 = \sqrt[n]{8}$

Eigentlich sieht man schon, dass $\underline{\underline{n = 3}}$ sein muss. Begründung: $\sqrt[3]{8} = 2$, denn $2^3 = 8$.

Wer das nicht sofort sieht, benutzt den Taschenrechner.

Alternative: Es geht auch, die Gleichung durch Probieren zu lösen, denn $n \in \mathbb{N}$.

Beginnend mit $n = 2$: $\sqrt{8} \neq 2$

Dann $n = 3$: $\sqrt[3]{8} = 2$

Wird n größer (d. h. $n > 3$), dann ist $\sqrt[n]{8} < 2$.
Es kann also keine weitere Lösung mehr geben.

Ergebnis: $n = 3$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{g(x) = \sqrt[3]{x}}}$